PRUEBAS DE SELECTIVIDAD

MATEMÁTICAS II

COU • BACHILLERATO LOGSE

P. Granados / A. Arribas

Distrito Universitario de Madrid
COU (1995 - 1996)
B. LOGSE (1996)

McGraw Hill

PRUEBAS DE SELECTIVIDAD

MATEMÁTICAS II

Pedro Granados García de Tomás
Profesor de Secundaria de Matemáticas
I. B. Orcasitas, Madrid

Antonio Arribas de Costa
Catedrático de Matemáticas
I. B. Rey Pastor, Madrid

Revisión técnica
MARÍA DEL CARMEN ALONSO DELGADO
Catedrática de Matemáticas
I. B. Beatriz Galindo, Madrid

McGraw-Hill

MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
PARÍS • SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

PRUEBAS DE SELECTIVIDAD. MATEMÁTICAS II

McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A.
Edificio Valrealty, 1.ª planta
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

ISBN: 84-481-0907-4
Depósito legal: M. 735-1997

Editora: Paz Utrera
Ayudante editorial: Carlos Cabrera
Compuesto en MonoComp, S. A.
Impreso en Impresos y Revistas, S. A. (IMPRESA)

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Contenido

Prólogo

Este libro recoge los exámenes de Selectividad de **Matemáticas II** propuestos en el **Distrito Universitario de Madrid** en las convocatorias de COU de julio y septiembre de 1995 y de 1996, así como las correspondientes al Bachillerato Logse del año 1996.

La respuesta a cada ejercicio incluye dos partes: el ***Análisis y enfoque*** y la ***Resolución*** propiamente dicha.

El ***Análisis*** consiste en algunas frases que comentan y aclaran el enunciado.

Es frecuente que algunos ejercicios relativamente sencillos tengan una presentación engorrosa, larga o compleja. ***Analizar*** este enunciado y realizar algún dibujo sencillo puede ayudar a valorar si la complejidad del ejercicio es real o aparente.

En el apartado de ***Enfoque*** se presenta la estrategia que nos permitirá abordar el ejercicio. Se diseñan las líneas maestras que se van a seguir, se designan con letras o símbolos adecuados aquellos elementos (puntos, rectas, matrices, sucesos, etc.) que van a intervenir en el problema y se indican los instrumentos teóricos o de cálculo que se van a utilizar. En ocasiones se incluye algún dibujo esquemático de la situación, de gran utilidad para comprender claramente la estrategia que se va a seguir.

La extensión del ***Enfoque*** es muy variable, dependiendo de los ejercicios. Para los problemas de Geometría Analítica, en particular, suele ser muy recomendable detallar los pasos a dar, así como confeccionar una gráfica aproximada.

En la ***Resolución*** se realizan todas las operaciones necesarias para determinar la o las incógnitas pedidas, siguiendo las pautas esbozadas en el ***Enfoque.***

En muchos casos se indica la justificación de alguno de los pasos dados, se dice qué propiedad o qué resultado teórico se está utilizando.

Se trata de un *libro de problemas*, no de teoría. Se supone que estás familiarizado con las técnicas de cálculo y que tienes los conocimientos teóricos necesarios para afrontar los problemas.

¿Cómo utilizar este libro?

Lo mejor es que te enfrentes tú solo al enunciado y lo intentes resolver completamente. Posteriormente puedes consultar el libro para ver cómo se ha resuelto allí. *Compara* tu resolución con la del libro, tanto el planteamiento general, el enfoque, como los cálculos de detalle. A lo mejor descubres alguna forma de hacer las cosas que te convence, que te parece más lógica, fácil o cómoda que la manera que tú has empleado. Así estarás aprendiendo y mejorando tu preparación cara al examen de Selectividad.

No te conformes con mirar la solución numérica final y comprobar que coincide con la tuya.

Si después de meditarlo un tiempo prudencial no acabas de entender el enunciado puedes leer el párrafo correspondiente al ***análisis***.

Si necesitas más ayuda, lee también el segundo párrafo, en el que aparece el ***enfoque*** que le hemos dado al problema.

Algunas notaciones matemáticas no tienen un convenio aceptado universalmente. Por ejemplo, la concavidad y convexidad. En este libro se ha adoptado la decisión de «mirar» las gráficas «desde arriba», es decir, desde un punto en el eje OY, infinitamente alejado hacia arriba. De esta manera una función $f(x)$ donde $f''(x)$ sea positiva será cóncava, mientras que si $f''(x) < 0$ la función será convexa. La forma de la curva no depende del criterio adoptado: una curva con $f'' > 0$ tendrá forma similar a un mínimo relativo y una curva con $f'' < 0$ tendrá aspecto de máximo relativo.

Los logaritmos neperianos se designan por regla general con la notación ln. En algunos ejercicios en cuyo enunciado ya aparecían designados con la letra L, se ha mantenido esta notación.

En las operaciones con las filas y las columnas de una matriz generalmente se designa como F_i a la fila i-ésima, C_j a la columna que ocupa el lugar j en dicha matriz y E_i a la ecuación número i.

El examen de Selectividad

En este examen *no se exigen desarrollos teóricos*. Todo lo más, en alguna ocasión «cae» un ejercicio de carácter teórico-práctico.

Las *exigencias* pretenden incidir más en que el alumno tenga las ideas claras, conozca los conceptos fundamentales y sepa manejarlos y aplicarlos a problemas y cuestiones prácticas.

Parece evidente que la mejor manera de preparar estos exámenes consiste en leer un gran número de enunciados propuestos.

A la hora de enfrentarse a un examen va a ser muy necesaria la *memorización* de un considerable número de fórmulas, técnicas concretas de cálculo y otra serie de «trucos» que permitirán resolver los ejercicios.

Ya dentro del examen, hay que insistir en su *presentación* y en mantener un buen *control del tiempo* disponible.

Los autores

Clasificación temática

La referencia a cada ejercicio contiene:

a) Un número escrito con cifras romanas que indica el examen en el que se encuentra el ejercicio. Dentro de la misma convocatoria se ha situado en primer lugar el examen de Matemáticas II Obligatoria y después el de Matemáticas II Optativa.
b) Un número ordinario que indica en qué cuestión aparece dicho ejercicio.
c) Una letra mayúscula, A o B, que indica el repertorio en el que aparece.
d) El número de página en que comienza dicho ejercicio.
e) Algunas veces aparece un asterisco (*). Con este símbolo queremos señalar que el ejercicio en cuestión aparece en más de un apartado de la referencia temática.

Hemos dividido los contenidos del curso de Matemáticas II en los tres grandes bloques habituales: *Álgebra*, *Funciones* y *Estadística y Probabilidad*.

Algunos bloques se han subdividido en varios *temas*, de forma que sea más cómodo precisar qué tipo de conocimientos se requieren para resolver el ejercicio.

Se indican el número total de ejercicios que han aparecido en estos últimos exámenes de Selectividad correspondientes a cada bloque y a cada tema.

ÁLGEBRA	*Examen/ Repertorio/ Cuestión*	*Pág.*	*Examen/ Repertorio/ Cuestión*	*Pág.*
Sistemas de ecuaciones	I-B-4	12		
	V-B-2	66	VII-B-1	92
	VI-A-1	73	X-A-2	133
	VI-B-2	79		
Matrices	II-B-1	23	IV-A-1	45
	V-A-1	59	VIII-A-1	103
	V-B-1	65	VIII-B-1	109
	VI-B-1	78	IX-A-1	116
	VII-A-1	86	X-A-1	130
Determinantes	I-A-1	4	III-A-4	35
	II-A-1	17	III-B-3	38
Programación lineal	I-A-2	4	VII-A-2	87
	II-A-2	18	VII-B-2	93
	II-B-2	24	VIII-A-2	105
	III-A-2	32	VIII-B-2	110
	IV-B-1	49	IX-B-1	121
	V-A-2	60	X-B-1	138
	VI-A-2	74		
FUNCIONES				
Funciones	IV-A-2	46	VIII-A-3	106
	IV-A-3	47	IXB2	125
Derivadas	II-A-3	19*	VIII-B-3	111
	II-B-2	38	IX-A-2*	117
	VI-A-3	75	X-A-3	133
	VI-B-3	79	X-B-2*	138
Representación de funciones	III-A-1	31	V-A-2	61
	IV-B-2	51	VII-B-3*	95
Integración	I-A-3	5	VII-B-3	95
	I-B-2	10		
	II-B-3	26	IX-A-2*	117
	V-B-3	67	IX-B-3	125
	VII-A-3	88	X-B-2*	138

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD	*Examen/ Repertorio/ Cuestión*	*Pág.*	*Examen/ Repertorio/ Cuestión*	*Pág.*
Tablas, gráficos y parámetros	I-A-4	7	V-B-5	69
	II-A-5	22	VI-A-5	77
	III-B-1	37	VII-A-5	95
	IV-A-5	48	VII-B-5	98
	IV-B-5	54	VIII-A-5	107
	V-A-5	63	VIII-B-5	112
Distribuciones bidimensionales. Correlación y regresión	I-B-3	11	IV-B-4	53
	III-B-5	40	VI-B-5	81
Cálculo de probabilidades	I-B-1	9	VII-A-4	90
	III-A-3	33	VII-B-4	97
	III-B-4	39	VIII-A-4	107
	IV-B-3	52	VIII-B-4	112
	V-A-4	63	IX-A-2	121
	V-B-4	68	IX-B-4	126
	VI-A-4	76	X-A-4	134
	VI-B-4	80	X-B-3	144
Distribución binomial	I-A-5	8	II-B-4	26
	II-A-4	21	IV-A-4	47
Distribución normal	I-B-5	13	III-A-5	36
	II-B-5	27		
Test de hipótesis	IX-A-4	120	X-B-3	139

PRUEBA DE SELECTIVIDAD

COU

Matemáticas II (Obligatoria)

Distrito Universitario de Madrid. Julio de 1995.

INSTRUCCIONES PREVIAS

- El tiempo disponible para la realización de la prueba es de una hora y treinta minutos.
- El alumno desarrollará uno de los dos repertorios siguientes, y dará respuestas claras y concisas a cada una de las cinco cuestiones. El número de repertorio elegido debe figurar al principio del ejercicio.
- *Calificación:* La calificación máxima de cada uno de los cinco ejercicios será de 2 puntos.

REPERTORIO A

CUESTIÓN 1

Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a+2 \\ a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \end{vmatrix}$$

CUESTIÓN 2

Determinar el valor de a y b para que la función objetivo $F(x, y) = x + y$ adquiera su valor máximo en el punto (3, 2) de la región definida por las inecuaciones:

$$x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0 \quad x + 3y \leqslant a \quad 2x + y \leqslant b$$

CUESTIÓN 3

Esboce la gráfica de $f(x) = |\cos x|$ y calcule el área encerrada por dicha gráfica en el intervalo $[0, 2\pi]$ y el eje de abscisas.

CUESTIÓN 4

Los pesos en miligramos de 20 recién nacidos son:

3.686, 3.724, 3.547, 2.539, 4.042, 3.959, 3.519, 3.180, 3.401, 2.524

3.515, 3.426, 3.436, 3.146, 2.891, 3.191, 2.565, 1.764, 3.948, 2.945

a) Construir una tabla de distribución de frecuencias cuyo primer intervalo sea (1.600, 2.200) y todos los intervalos tengan la misma amplitud.
b) Determinar gráficamente entre qué pesos estará el 90 % de la muestra, considerados excluidos el 5 % con peso más bajo y el 5 % con peso más alto.

CUESTIÓN 5

Para elegir a un jurado se dispone de cinco mujeres y de diez hombres. Se tiene que seleccionar al azar a seis personas. Se pide:

a) Probabilidad de que halla cinco mujeres y un hombre en el jurado.
b) Probabilidad de que halla al menos una mujer.

REPERTORIO B

CUESTIÓN 1

Disponemos de un dado cargado en el que la probabilidad de que salga un número es proporcional a dicho número. Se pide:

a) Probabilidad de que al lanzarlo salga un número par.
b) Probabilidad de que el número sea mayor de 3.

CUESTIÓN 2

Determinar el área del recinto situado encima de la parábola $y = x^2$ y debajo de la recta $y = 4$.

CUESTIÓN 3

En cinco alumnos se observaron dos variables: X = puntuación obtenida en un determinado test, e Y = nota alcanzada en un examen de matemáticas. Los resultados se indican en la tabla siguiente:

X	110	140	90	120	130
Y	6	9	5	7	8

a) Hallar la recta de regresión.
b) Sabiendo que un alumno obtuvo un 100 en el test, pero no realizó el examen de matemáticas, predecir, si es posible, la nota que hubiera obtenido.

CUESTIÓN 4

¿Cuál de los siguientes sistemas tiene solución? ¿Cuántas soluciones tiene? Resuélvalo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 10 \\ 3x + 3y + 3z = 12 \end{cases}$$

CUESTIÓN 5

El tiempo necesario para terminar determinado examen sigue una distribución normal con media 60 minutos y desviación estándar 10 minutos. Se pide:

a) ¿Cuánto debe durar el examen para que el 95 % de las personas lo terminen?
b) ¿Qué porcentaje de personas lo terminarán antes de 75 minutos?

RESOLUCIÓN DE LA PRUEBA

REPERTORIO A

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de averiguar el valor de un determinante de orden 3. En los elementos de la segunda y tercera fila aparece la letra o parámetro a. No sería nada extraño que la solución fuese una expresión dada en términos de a, aunque también es posible que no.

La mejor forma de saberlo sería conseguir algún que otro cero a través de las transformaciones permitidas.

Resolución

El camino que te proponemos es el de restar a cada fila la anterior multiplicada por a. En ese caso, el determinante quedaría:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a+2 \\ a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & a+1 & 2(a+2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a+1 & 2(a+2) \end{vmatrix} = 2(a+2) - 2(a+1) = 2$$

En este caso, las a-es han «desaparecido», y el resultado es una constante.

Cuestión 2

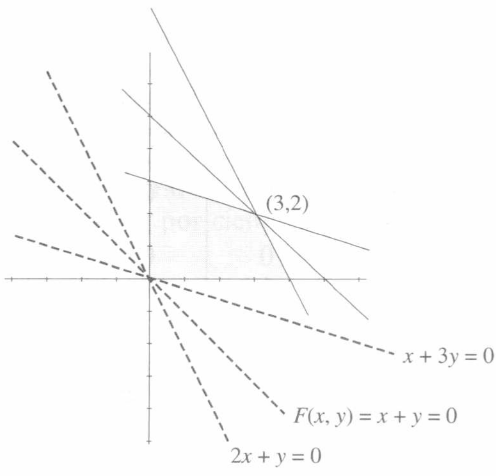
Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un ejercicio de optimización en el que aparecen enunciadas mediante inecuaciones las condiciones de restricción. Lo novedoso, con respecto a otros ejercicios de este tipo, es que en dos de sus restricciones nos encontramos con a y b, ambos desconocidos, cuando en otros casos se trataba de constantes conocidas. Por el contrario, de lo que sí disponemos es del punto en el que queremos que la función objetivo se haga máxima. Se nos pide que encontremos los valores de a y de b, para los cuales la función objetivo $F(x, y)$ es máxima en el punto (3, 2).

Sabemos que en un problema de Programación Lineal con dos variables, si la región factible existe y es acotada, el valor óptimo de la función objetivo se alcanza en uno de los vértices del polígono que limita la región, o a lo largo de uno de los lados. Si intentas representar la región, dando a «a» y a «b» sendos valores positivos, observarás que se trata de una región acotada. De esta manera, el punto (3, 2) deberá encontrarse o en la recta $x + 3y = a$, o en $2x + y = b$, o en la intersección de ambas. Observa también que la función objetivo no es paralela a ninguna de ellas.

Resolución

Al no ser paralela la función objetivo a las rectas, al trasladarla no coincidirá con ninguna de ellas, por lo que la única solución será (3, 2). Pues bien, el punto ha de satisfacer ambas ecuaciones, es decir, $x + 3y = a$ y $2x + y = b$, por tanto, $3 + 3 \cdot 2 = a$, $2 \cdot 3 + 2 = b$, de aquí que $a = 9$ y $b = 8$.



Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

En el enunciado aparece una función dada en su forma explícita, cuya expresión es el valor absoluto del coseno de un ángulo. Se nos pide, en primer lugar, un esbozo de su representación, y posteriormente el cálculo del área encerrada por ella y el eje OX entre 0 y 2π.

En la representación conviene dedicarse al coseno olvidando al principio el valor absoluto. Para ello, bastará con encontrar los puntos de corte, recordar que se trata de una función que se repite cada 2π, y construir una tabla con algunos valores. Hecho esto, nos ocupamos del valor absoluto, que como sabemos «convierte» en positivo todo aquello que es negativo, y mantiene positivo lo que ya era. El cálculo del área se reduce a la obtención de una primitiva inmediata, y al posterior uso de la regla de Barrow, aunque cuidado con los límites de integración.

Resolución

Comenzamos con $y = \cos x$.

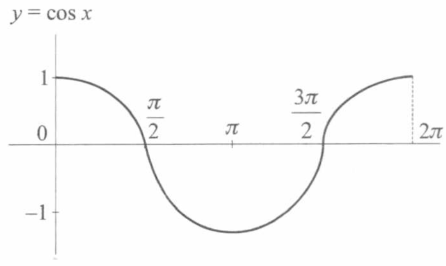
Puntos de corte con los ejes:

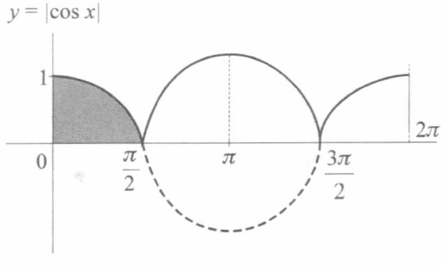
Eje OX $(\pi/2, 0)$, $(3\pi/2, 0)$, $(\pi/2 + k\pi, 0)$, siendo k un número entero.
Eje OY $(0, 1)$.

Tabla de valores:

X	$\cos x$	$\lvert\cos x\rvert$
0	1	1
$\pi/2$	0	0
π	-1	1
$3\pi/2$	0	0
2π	1	1

Representaciones gráficas:





Cálculo del área:

La superficie de la zona buscada es cuatro veces la rallada en el dibujo. Por tanto, calcularemos ésta y multiplicaremos por 4.

$$\int_0^{\pi/2} \cos dx = \operatorname{sen} x \Big]_0^{\pi/2} = \operatorname{sen} \pi/2 - \operatorname{sen} 0 = 1 - 0 = 1 \text{ u.a.}$$

Por tanto, el área pedida es 4 u.a.

Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da la relación de los pesos de veinte recién nacidos, y se pide, en primer lugar, la construcción de la tabla de frecuencias, fijado ya en el enunciado el tamaño de la clase o intervalo para datos agrupados. Por último, y a partir de la gráfica que nos convenga, hemos de encontrar los pesos de los recién nacidos, entre los que se encuentran el 90 % de los veinte pesos dados.

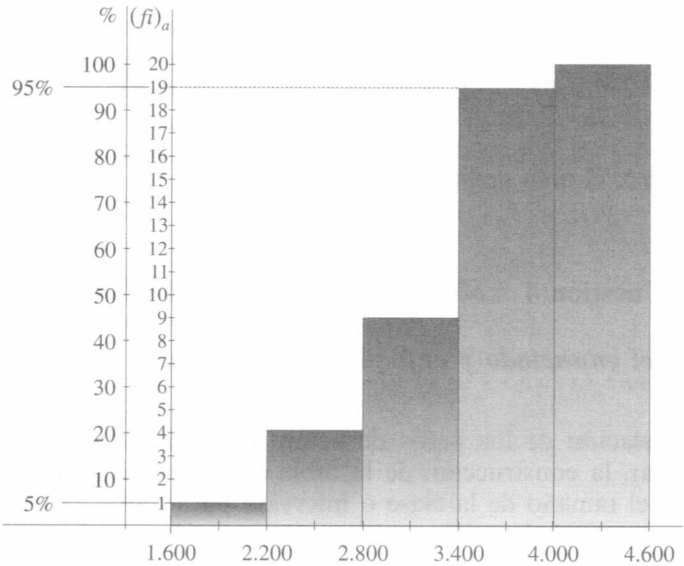
En la formación de la tabla necesitamos intervalos de 600 mg que nos recojan todos los pesos. Por lo que se refiere al apartado (*b*), conviene hacer una representación de las frecuencias acumuladas. Y para que podamos encontrar los pesos buscados, sería cómodo usar una escala adicional de tantos por ciento en el eje de las frecuencias acumuladas.

Resolución

a) Tabla de frecuencias:

I_i	f_i	$(f_i)_a$
[1.600, 2.200]	1	1
[2.200, 2.800]	3	4
[2.800, 3.400]	5	9
[3.400, 4.000]	10	19
[4.000, 4.600]	1	20

b) Representación de frecuencias acumuladas con escala de tantos por ciento:



Los pesos buscados son: 2.200 y 4.000.

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da el número de hombres y mujeres que hay en un grupo de personas; se pide, en primer lugar, la probabilidad de que elegidas 6 personas de dicho grupo al azar, 5 sean mujeres y una hombre, y en segundo lugar, la probabilidad de que al menos una de las seis personas sea mujer.

En la resolución tendremos en cuenta las probabilidades de que elegida una persona al azar sea hombre o mujer, y que se trata de una distribución binomial de parámetros $p = 2/3$, y $n = 6$.

Resolución

$$P(\text{«ser hombre»}) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{«ser mujer»}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

a) $P(\text{«seleccionar 5 mujeres y un hombre»}) = \binom{6}{5} (1/3)^5 (2/3)^1 =$ $= 0{,}016.$

b) $P(\text{«seleccionar al menos una mujer»}) = 1 - P(\text{«seleccionar 6 hombres»}) = 1 - (2/3)^6 = 0{,}91.$

REPERTORIO B

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un problema de probabilidad en el que aparece un dado cargado, es decir, en el que los sucesos elementales («que salga el 1», «que salga el 2»...) no tienen todos ellos la misma probabilidad. Se da una clave para conocer la probabilidad de que suceda cada uno de ellos, y se pide determinar las probabilidades de dos determinados sucesos compuestos.

En la resolución buscaremos el valor de la probabilidad de cada suceso elemental; para ello prestaremos especial atención a la clave, según la cual la probabilidad del suceso elemental «salir el número *n*» es proporcional a ese número, y al hecho de que la suma de dichas probabilidades es la probabilidad del suceso seguro, es decir, la unidad.

Resolución

$P(\text{«salir el número } n\text{»}) = k \cdot n$, por tanto,

$$P(1) = k \cdot 1 \quad ; \quad P(2) = k \cdot 2 \quad ; \quad P(3) = k \cdot 3$$

$$P(4) = k \cdot 4 \quad ; \quad P(5) = k \cdot 5 \quad ; \quad P(6) = k \cdot 6$$

Como:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

tenemos que:

$$k \cdot 1 + k \cdot 2 + k \cdot 3 + k \cdot 4 + k \cdot 5 + k \cdot 6 = 1$$

y de aquí que $21 \cdot k = 1$; luego $k = \frac{1}{21}$.

Sabiendo la constante de proporcionalidad, tenemos la probabilidad de cada suceso elemental.

$$P(1) = \frac{1}{21} \quad ; \quad P(2) = \frac{2}{21} \quad ; \quad P(3) = \frac{3}{21}$$

$$P(4) = \frac{4}{21} \quad ; \quad P(5) = \frac{5}{21} \quad ; \quad P(6) = \frac{6}{21}$$

a) P(«salga un número par») = P(«salga el 2») + P(«salga el 4») + P(«salga el 6») = $2/21 + 4/21 + 6/21 = 12/21$.

b) P(«salga un número mayor que 3») = P(«salga el 4») + P(«salga el 5») + P(«salga el 6») = $4/21 + 5/21 + 6/21 = 15/21$.

Cuestión 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se pide calcular el área de una región del plano que se encuentra limitada por las gráficas de dos funciones dadas en su forma explícita.

Buscaremos los puntos de intersección entre ambas funciones, para resolver posteriormente la integral definida. Como se trata de dos funciones sencillas, conviene realizar un esbozo de sus gráficas, para hacernos una idea más clara de la situación.

Resolución

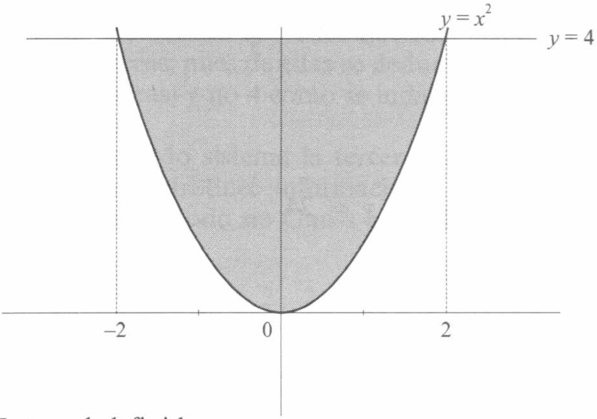
Puntos de intersección:

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 4 \end{array}\right\}$$

$x^2 = 4$, $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

Representación gráfica:



Integral definida:

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Bigg]_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da la tabla de una distribución bidimensional y se pide, en primer lugar, la ecuación de la recta de regresión correspondiente, y en segundo lugar, encontrar el valor de una de las variables que corresponde con el valor ya conocido de la otra.

Para determinar la recta de regresión bastará con utilizar las fórmulas adecuadas. Por lo que se refiere al valor buscado, conviene decir que es fácil de encontrar, sin más que sustituir el valor ya conocido en la recta de regresión calculada. No obstante, la calidad de la predicción que hacemos de esta manera dependerá del valor del coeficiente de correlación entre ambas variables.

Resolución

a) Recta de regresión.

Las medias:

$$x = \frac{\Sigma x_i}{5} = 118 \quad ; \quad y = \frac{\Sigma y_i}{5} = 7$$

Las varianzas:

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma(x_i - x)^2}{5} = 296 \quad ; \quad \sigma_y^2 = \frac{\Sigma(y_i - y)^2}{5} = 2$$

La covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{\Sigma x_i y_i}{5} - x \cdot y = 24$$

El coeficiente de correlación:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0{,}99$$

La recta de regresión:

$$y - y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - x) \quad ; \quad y - 7 = 0{,}081\,(x - 118)$$

b) La predicción.

Como el coeficiente de correlación es 0,99, la predicción será fiable; por tanto, sustituyendo en la ecuación de la recta de regresión x por 100, obtenemos $y = 5{,}54$.

Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se dan dos sistemas, muy parecidos, de ecuaciones lineales con tres ecuaciones y tres incógnitas cada uno de ellos. Se pide, en primer lugar, que encontremos cuál de ellos tiene solución, dando a entender que uno de ellos no tiene, y que determinado éste, lo resolvamos.

Ambos sistemas son muy parecidos, tanto que los tres primeros miembros de las ecuaciones coinciden; no así los términos independientes o segundos miembros. Con algo de atención podemos comprobar que, en el segundo sistema, la suma de las dos primeras ecuaciones coincide con la tercera. No pasa lo mismo en el primer sistema, en el que esto es cierto para el primer miembro pero no para el segundo.

Resolución

En el primer sistema la tercera ecuación es «casi» la suma de las otras dos. Este «casi» es lo que hace que esta ecuación sea contradictoria con las dos primeras, pues de ellas se deduce que $3x + 3y + 3z = 3$ (suma de las dos primeras) y no 4 como se indica. Por tanto, se trata de un sistema incompatible.

En el segundo sistema la tercera ecuación es suma de las otras dos, por tanto no introduce información alguna para la resolución de éste. Aplicamos el método de Gauss en su resolución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{(1)}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ -3y = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x = 1 - 2 \cdot 0 - z = 1 - z \\ y = 0 \end{array}$$

Solución: $(1 - z, 0, z)$

Tiene infinitas soluciones.

(1) $E'_1 = E_1$
$E'_2 = E_2 - 2E_1$

Nota: Sin darse cuenta de la relación entre las ecuaciones, también se resuelve de una manera inmediata este ejercicio aplicando directamente el método de Gaus a ambos sistemas.

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

A partir de una distribución normal $N(60, 10)$, por la que se rige el tiempo necesario para terminar un determinado examen, se pide encontrar el valor de la variable estadística que deja por debajo de él al 95 % de la población. Así como la probabilidad de que elegida una persona al azar, halla terminado el examen antes de 75 minutos.

En la resolución de este ejercicio utilizaremos las tablas de la Normal (0, 1), después de tipificar la variable, en sentido inverso en el primer apartado, y directo en el segundo.

Resolución

a) Llamemos k al valor buscado, e interpretando el tanto por ciento en términos de probabilidad diremos que la probabilidad de que elegida una persona al azar, halla acabado el examen en un tiempo inferior a k, es del 0,9500. De aquí que:

$$P(x < k) = P\left(z < \frac{k - 60}{10}\right) = 0{,}9500$$

Buscando en las tablas en sentido inverso, encontramos las siguientes correspondencias:

$$0{,}9505 \Leftrightarrow 1{,}65$$
$$0{,}9495 \Leftrightarrow 1{,}64$$

Por tanto, a 0,9500 le ha de corresponder necesariamente 1,645, luego:

$$\frac{k - 60}{10} = 1{,}645, \quad k = 76{,}45$$

b) El porcentaje de personas que han acabado el examen antes de 75 minutos lo hallamos a partir de la probabilidad de que una persona elegida al azar haya terminado el examen antes de 75 minutos.

$$P(x < 75) = P\left(z < \frac{75\text{-}60}{10}\right) = P(z < 1{,}5) = 0{,}9332$$

es decir, el 93,32 %.

PRUEBA DE SELECTIVIDAD II

COU

Matemáticas II (Optativa)

Distrito Universitario de Madrid. Julio de 1995.

INSTRUCCIONES PREVIAS

- El tiempo disponible para la realización de la prueba es de una hora y treinta minutos.
- El alumno desarrollará uno de los dos repertorios siguientes, y dará respuestas claras y concisas a cada una de las cinco cuestiones. El número de repertorio elegido debe figurar al principio del ejercicio.
- *Calificación:* La calificación máxima de cada uno de los cinco ejercicios será de 2 puntos.

REPERTORIO A

CUESTIÓN 1

Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ sabiendo que $\begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = 100.$

CUESTIÓN 2

Dibujar la región definida por las siguientes desigualdades y determinar en ella el punto en el que la función $F(x, y) = 6x + y$ toma el valor máximo:

$$\left.\begin{aligned} -2x + 9y &\geqslant 0 \\ 5x + y &\leqslant 47 \\ x + 2y &\leqslant 22 \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$

CUESTIÓN 3

Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ y esbozar su gráfica.

CUESTIÓN 4

En un examen se formulan 38 preguntas del tipo Verdadero-Falso. El examen se aprueba si se contestan correctamente al menos 20 preguntas. Si se lanza una moneda para decidir la respuesta de cada pregunta, calcular la probabilidad de aprobar el examen.

CUESTIÓN 5

La suma de unos datos es de 25 unidades y la de sus cuadrados es de 250 unidades cuadradas. Si la media y la desviación estándar coinciden, calcular:

a) Media de los datos.
b) Varianza de los datos.

REPERTORIO B

CUESTIÓN 1

Consideremos las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz A tal que al multiplicarla por B y sumarle C resulte $2A$.

CUESTIÓN 2

Describir mediante un sistema de desigualdades la región interior del polígono convexo con vértices en los puntos

$$O = (0, 0), A = (0, 4), B = (4, 0), C = (3, 3)$$

CUESTIÓN 3

Calcular $$\int \frac{1}{x^2} e^{1/x} \, dx$$

CUESTIÓN 4

Juan propone a Luis el siguiente juego: Lanzar una moneda 10 veces; si salen 4, 5 o 6 caras gana Luis, y en caso contrario, gana Juan. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Juan?

CUESTIÓN 5

Se sabe que las notas de determinado examen siguen una distribución normal. El 15,87 % tiene una nota superior a 7 puntos y el 15,87 % tiene nota inferior a 5 puntos. Calcular:

a) Porcentaje de alumnos cuya nota está entre 5 y 7 puntos.
b) Nota media del examen.

RESOLUCIÓN DE LA PRUEBA

REPERTORIO A

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se pide el valor de un determinante de orden 3, a partir del valor de otro del mismo orden.

En la resolución, mediante propiedades de los determinantes, iremos transformando el determinante buscado hasta que encontremos una expresión relacionada con el determinante dado y que nos permita el cálculo.

Resolución

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -(-1)\begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=} -(-1)(-1)\begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=} -(-1)(-1)(-1)\begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)(-1)(-1)\,100 = 100$$

(1) Al intercambiar dos filas o columnas de un determinante, éste cambia de signo.
(2) Si en un determinante se multiplica una fila o columna por un número cualquiera, k (en este caso $k = -1$), el determinante queda multiplicado por ese número.

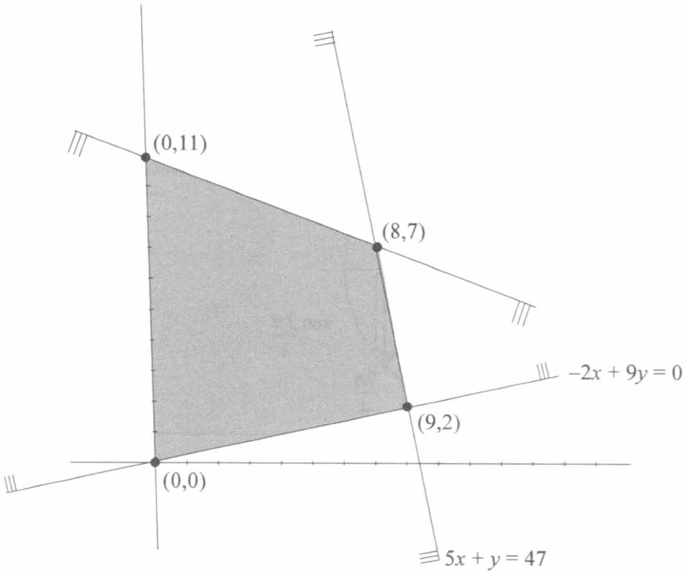
Cuestión 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un ejercicio de optimización planteado sin ningún contexto práctico. Tanto las condiciones de restricción como la función a optimizar aparecen ya enunciadas de forma matemática.

Representaremos la región de validez y calcularemos el valor mínimo de $F(x, y) = 6x + y$ en los vértices de dicha región.

Resolución



$F(0, 11) = 11$
$F(0, 0) = 0$
$F(9, 2) = 54 + 2 = 56$
$F(8, 7) = 48 + 7 = 55$

$F(x, y)$ toma un valor máximo en el (9, 2).

Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función trigonométrica cos x − *sen* x, y posteriormente esbozar su gráfica.

Para el estudio de la monotonía (crecimiento y decrecimiento) recurriremos al cálculo de la primera derivada y a la confección de una tabla. En cuanto al esbozo de la gráfica, tendremos en cuenta su período, el signo de la función, y algunos de los valores que toma.

Resolución

Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

La primera derivada $y' = -\text{sen } x - \cos x$ se anula ($y' = 0$) si $-\text{sen } x =$ $= \cos x$.

Es decir, si el seno y el coseno tienen el mismo valor pero signos distintos. Esto es así en $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ y $x_2 = \frac{7\pi}{4}$ (ver gráfico).

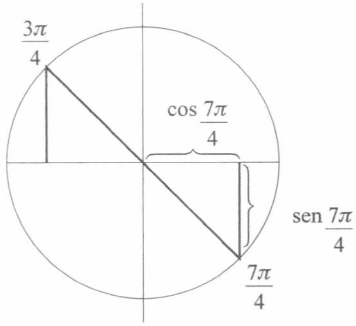


Tabla:

X	$(0,3\pi/4)$	$3\pi/4$	$(3\pi/4, 7\pi/4)$	$7\pi/4$	$(7\pi/4, 2\pi)$
Y	↘	∪	↗	∩	↘
Y'	$-$	0	$+$	0	$-$

luego la función crece en $(3\pi/4, 7\pi/4)$ y decrece en $(0,3\pi/4)$ y $(7\pi/4, 2\pi)$, teniendo un mínimo en $x = 3\pi/4$ y un máximo en $x = 7\pi/4$.

Signo de la función:

$y = 0$, siempre que $\cos x = \operatorname{sen} x$, es decir, para $x = \pi/4, 5\pi/4$.

Tabla:

X	$(0, \pi/4)$	$\pi/4$	$(\pi/4, 5\pi/4)$	$5\pi/4$	$(5\pi/4, 2\pi)$
Y	$+$	0	$-$	0	$+$

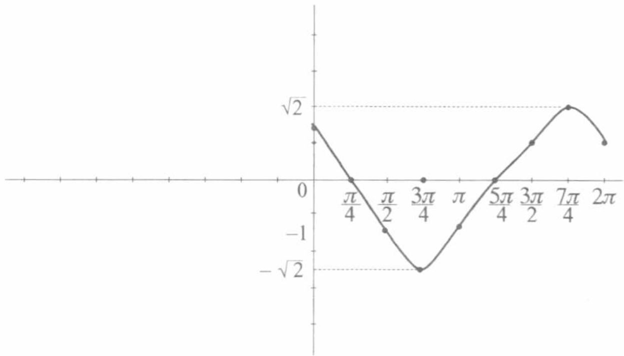
luego la función es positiva en $(0, \pi/4)$, $(5\pi/4, 2\pi)$ y negativa en $(\pi/4, 5\pi/4)$.

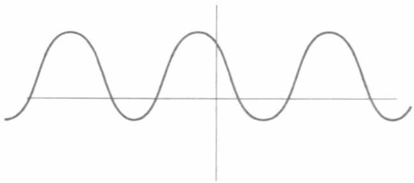
Período: 2π

Tabla de valores:

X	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
Y	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	1

Gráfica:





Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da el número de preguntas correctas que es necesario contestar en un examen de opción múltiple para aprobarlo, y se pide la probabilidad de aprobarlo, en el supuesto de que no influyese en las contestaciones más circunstancia que el azar.

Se trata de un ejercicio de probabilidad en el que la situación dada se ajusta a una distribución binomial. Los parámetros característicos de esta distribución son: el número total de preguntas ($n = 38$), y la probabilidad de que se acierte en la respuesta, si ésta se da al azar ($p = 1/2$).

Teniendo en cuenta que $np = 19$, mayor que 5, la distribución binomial se puede tratar como una normal de parámetros $x = np = 19$, y $\sigma = \sqrt{npq} = 3{,}08$. También hemos de considerar el hecho de pasar de una distribución discreta a una continua. Para ello:

$$\text{Si } x \text{ es } B(38, 0{,}5) \rightarrow x' \text{ es } N(19, 3{,}08) \rightarrow z \text{ es } N(0, 1)$$

entonces:

$$P(«\text{aprobar}») = P(x \geqslant 20) = P(x' > 19{,}5)$$

Resolución

$$P(«\text{aprobar}») = P(x \geqslant 20) = P(x' > 19{,}5) = P\left(Z > \frac{19{,}5 - 19}{3{,}08}\right) =$$

$$= P(z > 0{,}16) = 1 - P(z < 0{,}16) =$$

$$= 1 - 0{,}5636 = 0{,}4364$$

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un problema de estadística en el que se da la suma de un número de valores de la variable y la de sus cuadrados, y se pide, bajo el supuesto de que la media (x) y la desviación típica (σ) coinciden, el cálculo de media y varianza.

En la resolución utilizaremos las fórmulas necesarias, y dando por hecho que $x = \sigma$, encontraremos el número de valores, lo que nos llevará al cálculo inmediato de los parámetros buscados.

Resolución

La media:

$$x = \frac{\Sigma x_i f_i}{n}$$

La desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 f_i}{n} - x^2}$$

Sabemos que $\Sigma x_i f_i = 25$, y $\Sigma x_i^2 f_i = 250$.

Luego imponiendo que $x = \sigma$, tenemos:

$$\frac{\Sigma x_i f_i}{n} = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 f_i}{n} - x^2}$$

o lo que es lo mismo:

$$x = \sqrt{250/n - x^2}$$

elevando al cuadrado ambos miembros, tenemos:

$$x^2 = \frac{250}{n} - x^2$$

de donde,

$$2x^2 = \frac{250}{\mathrm{n}}$$

$$2\left(\frac{25}{n}\right)^2 = \frac{250}{\mathrm{n}}$$

$$\frac{1{:}250}{n^2} = \frac{250}{n}$$

$$n = 5$$

De las respectivas fórmulas tendremos que la media será $x = 5$, y la varianza $\sigma^2 = 25$.

REPERTORIO B

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se pide encontrar una matriz A que cumpla una determinada ecuación matricial ($AB + C = 2A$).

No se nos indica el orden de la matriz, pero sí hemos de multiplicarla por otra de orden 2×2, y el producto AB sumarlo a C, que también es de orden 2×2, este producto también ha de ser 2×2 y, por tanto, también A. Indicaremos cada elemento de la matriz buscada por una incógnita, e impondremos la condición dada para conocer el valor de éstas.

Resolución

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-1 & a+b \\ c & c+d+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a - 1 &= 2a \\ a + b &= 2b \\ c &= 2c \\ c + d + 2 &= 2d \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= -1 \\ c &= 0 \\ d &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

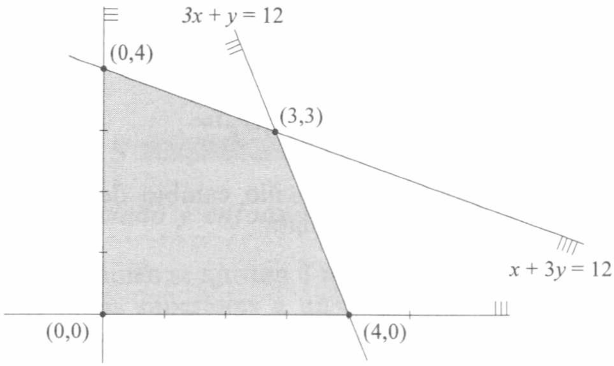
Cuestión 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Dados los cuatro vértices de un polígono convexo, se pide determinar un sistema de inecuaciones que describa la región interior de dicho polígono.

Hallaremos las ecuaciones de las rectas sobre las que se encuentran los lados del polígono, y a partir de ellas determinaremos las inecuaciones buscadas. Para facilitar la resolución, representaremos dicho polígono.

Resolución



Recta que pasa por (0, 4) y (3, 3): $y = ax + b$

$$\begin{array}{ll} 4 = a0 + b & b = 4 \\ 3 = a3 + b & a = -1/3 \end{array}$$

Luego la ecuación queda: $y = -1/3x + 4$, o $x + 3y = 12$

Recta que pasa por (4, 0) y (3, 3): $y = mx + n$

$$\begin{array}{ll} 0 = m4 + n & n = 12 \\ 3 = m3 + n & m = -3 \end{array}$$

Luego la ecuación queda: $y = -3x + 12$, o $3x + y = 12$

Las dos rectas que faltan son los ejes OX ($y = 0$) y OY ($x = 0$).

Cada recta divide al plano en dos semiplanos, de manera que en cada uno de ellos la igualdad que supone su ecuación pasa a ser desigualdad (por ejemplo, en cada semiplano separado por la recta $x + 3y = 12$, se cumple que $x + 3y < 12$, o $x + 3y > 12$), discernir cuál de ellas corresponde con la región que tenemos es nuestro objetivo. Para ello bastará con elegir un punto y comprobar la desigualdad a la que pertenece. Sugerimos el mismo (0, 0), por la simplificación en los cálculos.

El sistema de desigualdades buscado es

$$\left.\begin{array}{r} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 3y < 12 \\ 3x + y < 12 \end{array}\right\}$$

Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se pide el cálculo de las primitivas de la función

$$f(x) = (1/x^2) \cdot e^{1/x}$$

Para ello bastará aplicar un sencillo cambio de variable, que nos permitirá integrar de manera inmediata.

Resolución

Llamemos $t = 1/x$, de aquí que $\mathrm{d}t = (-1/x^2)\,\mathrm{d}x$; por tanto,

$$\int (1/x^2)\, e^{1/x}\, dx = \int e^{1/x}(1/x^2)\,\mathrm{d}x = -\int e^{1/x}(-1/x^2)\, dx = -\int e^t\, dt =$$

$$= -e^t = -e^{1/x} + k$$

Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se plantea un problema de probabilidad en el que, tras lanzar una moneda 10 veces, se pide la probabilidad del suceso «salir 4, 5 o 6 caras».

Típico problema que se ajusta a una distribución binomial de probabilidad, en la que los parámetros son $n = 10$ y $p = 1/2$. En su resolución calcularemos la probabilidad de que gane Luis, y con la propiedad de la probabilidad del suceso contrario obtendremos la probabilidad de que gane Juan.

Resolución

$$P(\text{«gane Luis»}) = P(\text{«salgan 4 caras»}) + P(\text{«salgan 5 caras»}) +$$

$$+ P(\text{«salgan 6 caras»}) =$$

$$= \binom{10}{4} \cdot (0{,}5)^4 \cdot (0{,}5)^6 + \binom{10}{5} \cdot (0{,}5)^5 \cdot (0{,}5)^5 +$$

$$+ \binom{10}{6} \cdot (0{,}5)^6 \cdot (0{,}5)^4 =$$

$$= (0,5)^{10}\left[\binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6}\right] = 0,6562$$

$$P(\text{«gane Juan»}) = 1 - P(\text{«gane Luis»}) = 1 - 0,6562 = 0,3438$$

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

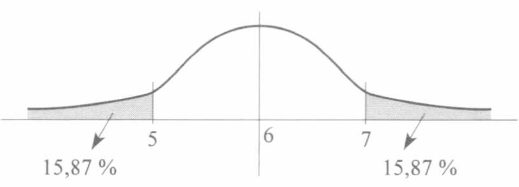
Las notas de un examen se ajustan a una distribución normal. Se dan los porcentajes de notas superiores a un determinado valor, e inferiores a otro. Se pide, en primer lugar, el porcentaje de notas situadas entre dichos valores, y después la nota media del examen.

En cuanto al porcentaje pedido, recordar que entre los dados y el que falta sumarían toda la población de notas. Para calcular la nota media del examen tendremos en cuenta la simetría de la campana de Gauss, así como la posición central de la media.

Resolución

a) 100 % − 15,87 % − 15,87 % = 68,26 %

b) Al tratarse las notas 5 y 7 de dos simétricas respecto de la media, para el cálculo de ésta bastará con sumar ambas y dividir entre dos, de esta manera tendremos la nota equidistante de ambas, y a su vez la posición central de la distribución normal. (Ver gráfico.)



Por tanto, la media será el 6.

PRUEBA DE SELECTIVIDAD

III

COU

Matemáticas II (Obligatoria)

Distrito Universitario de Madrid. Septiembre de 1995.

INSTRUCCIONES PREVIAS

- El tiempo disponible para la realización de la prueba es de una hora y treinta minutos.
- El alumno desarrollará uno de los dos repertorios siguientes, y dará respuestas claras y concisas a cada una de las cinco cuestiones. El número de repertorio elegido debe figurar al principio del ejercicio.
- *Calificación:* La calificación máxima de cada uno de los cinco ejercicios será de 2 puntos.

REPERTORIO A

CUESTIÓN 1

Dada la función

$$y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

determinar su dominio y asíntotas y esbozar su gráfica.

CUESTIÓN 2

Una conservera dispone diariamente de 350 kg de mejillones que debe envasar en latas de dos tamaños: normal y familiar. Las latas de tamaño normal llevan 140 g de mejillones y suponen un beneficio de 30 pesetas por lata. Las de tamaño familiar llevan 440 g de mejillones y su beneficio es de 100 pesetas por lata. Por razones de producción, al menos el 70 % de las latas deben ser de tamaño familiar. ¿Cuál debe ser la producción diaria para que el beneficio sea máximo?

CUESTIÓN 3

Se lanzan tres monedas: la primera de 5 pesetas, la segunda de 25 y la tercera de 100. Se consideran los sucesos siguientes: A = aparecen dos caras, B = aparece cara en la moneda de 100, C = aparecen caras en las monedas de 5 y de 25. Se pide:

a) $P(A/B)$
b) ¿Son independientes B y C?

CUESTIÓN 4

Determinar el valor de a que anula el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 3a+1 & a & a \\ 6a+2 & 2a+1 & 2a \\ 3a+1 & a & a+1 \end{vmatrix}$$

CUESTIÓN 5

Un grupo de alumnos realizan dos pruebas deportivas A y B, destinadas a conocer las aptitudes de los alumnos en dos deportes concretos. La puntuación media obtenida por el grupo en la prueba A fue 45, con una desviación estándar de 5,6. La puntuación media obtenida por el grupo en la prueba B fue 36, con una desviación estándar de 3,2. Si un alumno X obtiene en la prueba A una puntuación de 50 y en B una puntuación de 45, y otro alumno Y obtiene 48 en las dos pruebas:

a) ¿Qué deporte se recomendaría a cada uno?
b) ¿Qué alumno está, de forma global, más capacitado para el deporte?

REPERTORIO B

CUESTIÓN 1

Con la variable edad, en años, de una muestra de 100 personas se forma la siguiente tabla de frecuencias:

Edad en años	Frecuencia acumulada
[10-30)	10
[30-50)	30
[50-70)	60
[70-90)	84

a) Completar la tabla de frecuencias.
b) Calcular la media y la desviación estándar usando la tabla.

CUESTIÓN 2

Hallar en cuánto aumenta el área de un círculo cuyo radio mide 1 metro si éste aumenta su longitud en un 15 %.

CUESTIÓN 3

Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ es igual a 1, calcular el valor del determinante de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

CUESTIÓN 4

Una cadena metálica está compuesta por 4 eslabones. La probabilidad de ruptura de cada eslabón a un peso de 100 kilos es de 0,6. Se somete la cadena a un peso de 100 kilos y se pide:

a) Probabilidad de que no se rompa la cadena.
b) Si se quiere que la probabilidad de que no se rompa la cadena sea de 0,81, ¿cuál debe ser la probabilidad de rotura de cada eslabón?

CUESTIÓN 5

Dada la distribución de frecuencias de la tabla

X \ Y	1	3	5
4	1	4	2
7	2	6	3
9	1	3	1

Calcular:

a) El coeficiente de correlación.
b) El diagrama de dispersión.

RESOLUCIÓN DE LA PRUEBA

REPERTORIO A

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de estudiar algunos aspectos de una función racional dada en forma explícita, con el fin de representarla gráficamente. Se pide especial atención al estudio del dominio y de las asíntotas.

Si nos fijamos en la fórmula de la función podremos deducir bastantes de sus características (signo, dominio, etc.).

Resolución

Dominio:

Al tratarse de una función racional, tendremos presentes aquellos valores de la x que anulan el denominador. En este caso $f(x)$ existe siempre que x no se anule. $\mathrm{Dom} f = R - \{0\}$.

Asíntotas:

Horizontales: No tiene, pues $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

Verticales: $x = 0$, ya que $\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to 0-} f(x) = +\infty$.

Oblicuas: No tiene.

Signo de la función:

Como el numerador y el denominador son siempre positivos para cualquier valor de la x en donde está definida la función, ésta lo es también.

Simetrías:

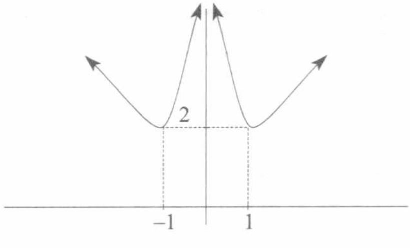
Se trata de una función par, ya que $f(-x) = f(x)$.

Puntos de corte con los ejes:

No tiene. No se anula el numerador para ningún valor de x.

Creemos que estos datos son suficientes para dibujar un esbozo de la gráfica de esta función. No obstante no resulta complicado el estudio de su monotonía y forma recurriendo a las derivadas primera y segunda respectivamente. Si lo haces así, verás que se trata de una función con dos mínimos en (1, 2) y (−1, 2), y con la segunda de sus derivadas siempre positiva, por tanto siempre cóncava.

Esbozo:



Cuestión 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un ejercicio de optimización planteado a partir de un supuesto práctico, en el que aparecen enunciadas de forma coloquial las condiciones de restricción. Se nos pide que encontremos la zona de validez que determinan las condiciones de restricción, y por último, que en dicha zona hallemos los valores de las variables que hacen máxima la función beneficio.

Representaremos la región de validez y calcularemos el valor de la función beneficio en los vértices de dicha región.

Resolución

Llamaremos x e y, respectivamente, al número de latas de tamaño normal y familiar envasadas en la conservera diariamente. Las condiciones de restricción corresponden con las siguientes inecuaciones.

La cantidad de mejillones, en gramos, utilizados para latas de ambos tamaños no ha de superar el total de mejillones (en gramos) del que disponemos.

$$140x + 440y < 350.000$$

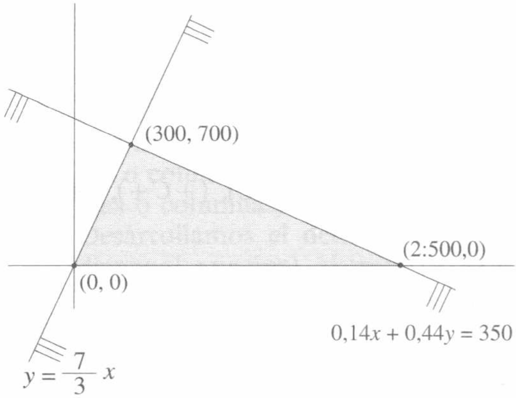
Las latas de tamaño familiar (y) deben ser al menos el 70 % del total de latas envasadas.

$$y > 0{,}7(x + y)$$

El número de latas en ambos tipos será una cantidad positiva o nula.

$$x > 0 \quad ; \quad y > 0$$

La función beneficio es $B(x, y) = 30x + 100y$.
La región de validez quedaría representada en el siguiente gráfico:



$B(0, 0) = 0$
$B(300, 700) = 79.000$
$B(2.500, 0) = 75.000$

El máximo beneficio se obtiene envasando 300 latas de tamaño normal y 700 de tamaño familiar.

Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

En el experimento aleatorio lanzar tres monedas distintas se describen tres determinados sucesos relacionados con el espacio muestral. Se pide la probabilidad de uno de ellos condicionada a que se dé otro, y decir si dos de ellos son independientes.

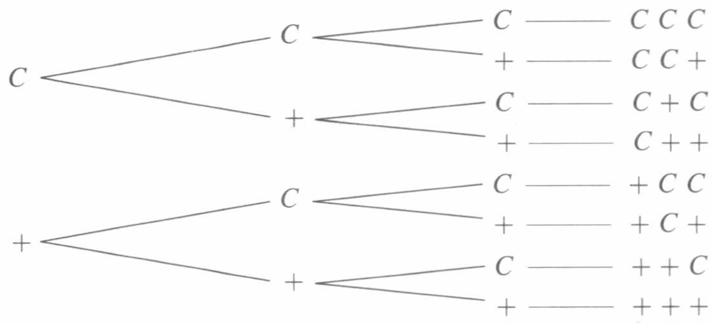
Para la resolución, tendremos en cuenta que dos sucesos son independientes si la realización de uno de ellos no implica la del otro. Dicho de otra manera, B es independiente de C si $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$. Utilizaremos un diagrama de árbol.

Resolución

A = «aparecen dos caras».
B = «aparece cara en la moneda de 100».
C = «aparecen caras en las monedas de 5 y de 25».

Diagrama de árbol:

Moneda de 5   Moneda de 25   Moneda de 100



$E = \{(CCC), (CC+), (C+C), (C++), (+CC), (+C+), (++C), (+++)\}$

$A = \{(CC+), (C+C), (+CC)\}$

$B = \{(CCC), (C+C), (+CC), (++C)\}$

$C = \{(CCC), (CC+)\}$

$A \cap B = \{(C+C), (+CC)\}$

$B \cap C = \{(CCC)\}$

a) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{2/8}{4/8} = 1/2$

b) B es independiente de C, ya que $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
$P(B \cap C) = 1/8$ y $P(B) \cdot P(C) = 4/8 \cdot 2/8 = 1/8$.

Nota: En cuanto al apartado *a*), la $P(A/B)$, o probabilidad de que si aparece cara en la moneda de 100 aparezcan dos caras en total es $1/2$, ya que al fijar la cara de 100 nos quedarían dos opciones ventajosas de cuatro posibles (*cx,xc* de *cx,xc,xx,cc*) en las dos monedas restantes. Por lo que se refiere al apartado *b*), resulta evidente el hecho de que el salir cara en la moneda de 100 (suceso *B*) no influye para nada en salir cara en las otras dos (suceso *C*), y viceversa.

Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de encontrar el valor de una incógnita a que anula el determinante de orden tres dado.

Antes de desarrollar el determinante aprovecharemos las propiedades de los determinantes para transformar el dado en uno más fácil de calcular, y por último igualaremos a cero el resultado para encontrar dicho valor.

Resolución

$$\begin{vmatrix} 3a+1 & a & a \\ 6a+2 & 2a+1 & 2a \\ 3a+1 & a & a+1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3a+1 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 3a+1=0$$

(1) Sustituimos la segunda fila por el resultado de sumar ésta con la primera multiplicada por -2, y la tercera por la diferencia de ésta y la primera. Recordemos que, si en un determinante se sustituye una fila o columna por ella misma más una combinación lineal de otras filas o columnas, el valor del determinante no sufre variación.

(2) Desarrollamos el determinante multiplicando los elementos de la diagonal principal, al tratarse de una matriz triangular.

Alternativa (II)

Restamos la primera fila a la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 3a+1 & a & a \\ 6a+2 & 2a+1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a+1 & a \\ 6a+2 & 2a+1 \end{vmatrix} = (3a+1)\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 2a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3a+1)(2a+1-2a) = 3a+1=0 \quad ;$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se dan las medias y desviaciones típicas de dos poblaciones estadísticas relativas a dos pruebas deportivas A y B, y los valores de dos deportistas en ambas pruebas. Se pide, en primer lugar, en qué deporte destaca cada uno de ellos y, por último, cuál es el más destacado en ambos deportes.

En la resolución compararemos los resultados obtenidos por los deportistas en ambas pruebas, aunque antes de esto tendremos que normalizarlas, al tratarse de poblaciones con distintos parámetros estadísticos.

Resolución

Normalizando resultados:

	Alumno X	Alumno Y
Prueba A	$(50 - 45)/5,6$	$(48 - 45)/5,6$
Prueba B	$(45 - 36)/3,2$	$(48 - 36)/3,2$

	Alumno X	Alumno Y
Prueba A	0,89	0,53
Prueba B	2,81	3,75

a) Recomendaríamos como deporte a cada uno de ellos aquel en el que han obtenido mejor resultado en relación con el resto de participantes. En este caso, a X y a Y les recomendaríamos el mismo deporte, el B, ya que sus valoraciones son claramente mejores en este deporte.

b) Para saber cuál de los dos deportistas está más capacitado de forma global para el deporte, atendiendo al resultado de ambas pruebas, lo que haremos será calcular la media aritmética de ambos resultados, ya normalizados. Designaremos como mejor deportista a aquel de mayor media.

Media del alumno $X = (0,89 + 2,81)/2 = 1,85$
Media del alumno $Y = (0,53 + 3,75)/2 = 2,14$

Alumno más capacitado: Alumno Y.

REPERTORIO B

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

A partir de una tabla incompleta de frecuencias acumuladas en las que se muestra de manera agrupada las edades de 100 personas, se pide en primer lugar completar la tabla y, finalmente, calcular la media y desviación típica de esta distribución.

Completaremos la tabla teniendo presente que se trata de frecuencias acumuladas, y en cuanto al cálculo de los parámetros podemos recurrir a las conocidas fórmulas de la media y la desviación típica.

Resolución

Tabla:

Edad en años	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
[10-30)	10	10
[30-50)	20	30
[50-70)	30	60
[70-90)	24	84
[90-110)	16	100

Parámetros:

Al tratarse de datos agrupados necesitamos conocer las marcas de clase; para ello sumamos ambos extremos de cada una de ellas y dividimos entre dos. Tendremos, entonces, las siguientes marcas: 20, 40, 60, 80, 100.

La media:

$$x = \frac{\Sigma m_i f_i}{n} = \frac{20 \cdot 10 + 40 \cdot 20 + 60 \cdot 30 + 80 \cdot 24 + 100 \cdot 16}{100} = 63{,}20$$

La desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma m_i^2 f_i}{n} - x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{400 \cdot 10 + 1.600 \cdot 20 + 3.600 \cdot 30 + 6.400 \cdot 24 + 10.000 \cdot 16}{100} - 3.994} = 24{,}12$$

Cuestión 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Conocido el radio de un círculo y, por tanto, su área, se pide calcular el incremento de ésta, si la longitud del radio aumenta en un 15 %.

Calcularemos el área tras el aumento, y la diferencia entre ésta y la inicial nos dará el incremento buscado.

Resolución

Área antes del incremento: $A = \pi R^2 = \pi 1^2 = \pi$
Área después del incremento: $A' = \pi R'^2 = \pi(1 + 0{,}15)^2 = \pi(1{,}15)^2$
Incremento de área: $\mathrm{d}A = A' - A = \pi(1{,}15)^2 - \pi = 0{,}3225\pi = 1{,}013 \text{ m}^2$

Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se pide el valor de un determinante de orden 3, a partir del valor de otro del mismo orden.

En la resolución, mediante propiedades de los determinantes, iremos transformando el determinante buscado, hasta que encontremos una expresión relacionada con el determinante dado, y que nos permita el cálculo.

Resolución

$$\begin{vmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8/3 & 4/3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8/3 & 4/3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8/3 & 4/3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8/3 & 4/3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} 2 \cdot \frac{1}{3}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

(1) Si todos los elementos de una línea de un determinante están formados por la suma de dos sumandos, dicho determinante se descompo-

ne en la suma de dos determinantes que tienen los mismos elementos que el determinante dado, excepto los correspondientes a aquella línea que en el primer determinante está formada por los primeros sumandos y en el segundo por los segundos.

(2) Si en un determinante se multiplica una fila o columna por un número cualquiera, k, el determinante queda multiplicado por ese número.

Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

En el experimento de someter una cadena a un peso de 100 kilos, la probabilidad de que se rompa cada eslabón es de 0,6. Se pide, en el primer apartado, la probabilidad de que no se rompa la cadena si se la somete a dicho peso. En segundo lugar, si queremos que la probabilidad calculada en el primer apartado sea 0,81, se pide la probabilidad de rotura de cada eslabón.

Para la resolución, si entendemos que la propiedad de que se rompa cada eslabón es independiente de que se rompa cualquier otro, y no tenemos por qué entender lo contrario, bastará con aplicar la propiedad que se refiere a las probabilidades de sucesos independientes.

Resolución

Si la P(«se rompa un eslabón») = 0,6, por la propiedad de la probabilidad del suceso contrario, la P(«no se rompa un eslabón») = 0,4.

a) La probabilidad de que no se rompa la cadena coincide con la probabilidad de que no se rompa ningún eslabón. Por tanto, P(«no se rompa ninguno») = P(«no se rompa el primero» y «no se rompa el segundo» y «no se rompa el tercero» y «no se rompa el cuarto») = $P(\text{n.}^\circ\ 1.^\circ) \cdot P(\text{n.}^\circ\ 2.^\circ) \cdot P(\text{n.}^\circ\ 3.^\circ) \cdot P(\text{n.}^\circ\ 4.^\circ) = (0{,}4)^4 =$
$= 0{,}0256$.

b) Si queremos que esta probabilidad que acabamos de calcular sea 0,81, la probabilidad de que se rompa un eslabón será:

$$[P(\text{«no se rompa un eslabón»})]^4 = 0{,}81$$

luego,

$$[P(\text{«no se rompa un eslabón»})] = \sqrt[4]{0{,}81} = 0{,}948$$

De aquí que la P(«se rompa un eslabón»), que calculamos a través del suceso contrario, será:

$$P(\text{«se rompa un eslabón»}) = 1 - P(\text{«no se rompa un eslabón»}) =$$

$$= 0{,}052$$

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da la tabla de frecuencias de una distribución bidimensional, y se pide en primer lugar el cálculo del coeficiente de correlación, y en segundo lugar su representación gráfica a través de un diagrama de dispersión.

En el cálculo del coeficiente, bastará con aplicar la fórmula apropiada, mientras que para la representación, al tratarse de una distribución bidimensional en la que el número de datos es grande y, por tanto, los pares se repiten muchas veces (por eso se ha utilizado una tabla de doble entrada), la haremos «hinchando» los puntos proporcionalmente a su frecuencia.

Resolución

a) Tablas de cada variable, y otra forma de escribir la tabla conjunta:

x_i	f_i'
4	7
7	11
9	5

x_i	f_i''
1	4
3	13
5	6

x_i	y_i	f_i
4	1	1
4	3	4
4	5	2
7	1	2
7	3	6
7	5	3
9	1	1
9	3	3
9	5	1

El coeficiente de correlación será:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Para ello necesitamos conocer x e y, que son las medias de ambas distribuciones:

$$x = \frac{\Sigma x_i f_i'}{23} = 6{,}52 \quad ; \quad y = \frac{\Sigma y_i f_i''}{23} = 3{,}17$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\Sigma f_i x_i y_i}{23} - x\,y \text{ es la covarianza}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma f_i' x_i^2}{23} - x^2}$$

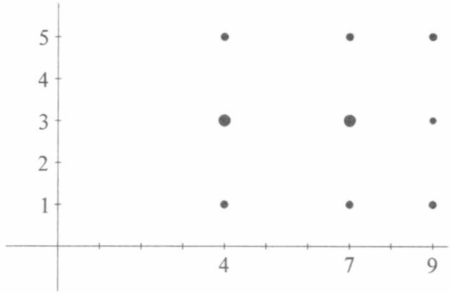
$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma f_i'' y_i^2}{23} - y^2}$$

Los cálculos resultantes serían:

$$\sigma_{xy} = -0{,}14 \quad ; \quad \sigma_x = 1{,}84 \quad ; \quad \sigma_y = 1{,}31$$

Por tanto, el coeficiente de correlación sería $P_{xy} = -0{,}058$.

b) Representación de la nube de puntos:



PRUEBA DE SELECTIVIDAD IV

COU

Matemáticas II (Optativa)

Distrito Universitario de Madrid. Septiembre de 1995.

INSTRUCCIONES PREVIAS

- El tiempo disponible para la realización de la prueba es de una hora y treinta minutos.
- El alumno desarrollará uno de los dos repertorios siguientes, y dará respuestas claras y concisas a cada una de las cinco cuestiones. El número de repertorio elegido debe figurar al principio del ejercicio.
- *Calificación:* La calificación máxima de cada uno de los cinco ejercicios será de 2 puntos.

REPERTORIO A

CUESTIÓN 1

Sea A una matriz 3×3 tal que $A^2 = A$. Calcular A cuando $|A| \neq 0$ y dar alguna solución con $|A| = 0$.

CUESTIÓN 2

Un automóvil de competición se desplaza a una velocidad que, entre las 0 y las 2 horas de la madrugada, viene dada por:

$$v = (2 - x)e^x$$

donde x es el tiempo en horas y v es la velocidad en cientos de kilómetros/hora. Hallar en qué momento del intervalo $[0, 2]$ circuló a velocidad máxima y calcular dicha velocidad. ¿En qué períodos ganó velocidad y en cuáles la redujo? ¿Se detuvo alguna vez?

CUESTIÓN 3

Considérese la función definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$$

si $x \neq 2$ y $x \neq 3$. Hallar el valor de $f(3)$ para que dicha función sea continua en $x = 3$.

CUESTIÓN 4

En una caja de golosinas hay seis caramelos y cuatro chocolatinas. Un niño toma al azar cuatro golosinas. Determinar:

a) Probabilidad de que sólo coja chocolatinas.
b) Probabilidad de que coja dos caramelos y dos chocolatinas.

¿Hay algún punto de inflexión?

CUESTIÓN 5

Las alturas, en centímetros, de 20 personas son:

165, 171, 154, 165, 149, 159, 151, 171, 191, 163
173, 193, 176, 152, 188, 169, 171, 184, 152, 183

a) Construya una tabla de distribución de frecuencias agrupando por intervalos de amplitud 10 desde 140 hasta 200 y calcule la media de las alturas utilizando dicha distribución.
b) Calcule la media directamente con los datos. Si el valor medio obtenido con los dos procedimientos es distinto, explique por qué.

REPERTORIO B

CUESTIÓN 1

Una empresa produce dos artículos A y B y tiene dos fábricas. En la primera, producir una unidad del artículo A cuesta 6 días-operario y una del B cuesta 2 días-operario, estando limitada la producción total a 300 días-operario. En la segunda fábrica, producir una unidad del A cuesta 2 días-operario y una del B también 2 días-operario, estando limitada la producción a 140 días-operario. Sabiendo que el beneficio por unidad del artículo A es de 600 pesetas y del B de 300 pesetas por unidad, calcular la producción de A y B para obtener un beneficio máximo.

CUESTIÓN 2

Hallar los máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

¿Hay algún punto de inflexión?

CUESTIÓN 3

En su camino al trabajo una persona pasa por tres semáforos cada mañana. Los semáforos operan independientemente. La probabilidad de una luz roja es de 0,4, 0,8 y 0,5, respectivamente, para cada uno de los tres semáforos. Se pide:

a) Probabilidad de que la persona encuentre los tres semáforos en rojo.
b) Probabilidad de que encuentre en rojo uno de ellos y los otros dos en verde.

CUESTIÓN 4

Se tomaron las medidas de la presión sistólica de cinco personas diferentes. Los resultados fueron los siguientes:

x: edad en años	20	30	50	60	70
y: presión en mm de Hg	100	110	140	160	165

a) Dibujar un diagrama de dispersión para los datos.
b) Determinar la recta de regresión.

CUESTIÓN 5

Dados los estadísticos media, desviación típica, varianza, mediana, moda y recorrido, y siendo x una observación cualquiera, ¿qué efecto tendría sobre los estadísticos anteriores realizar la operación $x_1 + 0{,}43$ para todas las observaciones?

RESOLUCIÓN DE LA PRUEBA

REPERTORIO A

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se nos pide resolver la identidad matricial $A^2 = A$, bajo dos supuestos distintos. Primero, que el determinante de dicha matriz sea distinto de cero, y segundo, que sea igual a cero.

Para resolverlo, utilizando el hecho de que una matriz con determinante no nulo tiene inversa, y operando convenientemente en la identidad, encontraremos el valor de A.

Resolución

Para una matriz A con determinante no nulo:

$$A^2 = A \quad ; \quad A \cdot A = A \quad ; \quad A^{-1} \cdot A \cdot A = A^{-1} \cdot A \quad ; \quad I \cdot A = I \quad ; \quad A = I$$

luego

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el caso de que A tenga el determinante nulo, no podemos calcular su inversa, luego operaremos de manera diferente:

$$A^2 = A \quad ; \quad A^2 - A = A - A \quad ; \quad A^2 - A = 0 \quad ; \quad A(A - I) = 0$$

de aquí podemos deducir que una posible solución será cuando $A = 0$, pues en ese caso es evidente que $A(A - I) = 0$, y además su determinante es nulo.

$$0\text{: matriz nula} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuestión 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da la fórmula que relaciona la velocidad que lleva un móvil, con el tiempo transcurrido en un determinado intervalo. Se pide encontrar los momentos de dicho intervalo en los que la velocidad aumenta, decrece, se anula, es máxima, e incluso obtener dicho valor máximo.

Lo resolveremos partiendo del hecho de que se trata de una función explícita con la variable independiente tiempo (x), y la dependiente, la velocidad (v), en la que estudiaremos su monotonía, máximos, y valores que anulan la variable dependiente (en este caso v, o velocidad).

Resolución

Para el estudio de máximos, mínimos y monotonía, derivamos e igualamos a cero.

$$v' = -e^x + (2 - x)\, e^x = (1 - x)\, e^x = 0, \text{ si } x = 1$$

Formamos la tabla en el intervalo dado [0, 2], y tenemos:

x	$[0, 1)$	1	$(1, 2]$
v	$\nearrow$	$\cap$	$\searrow$
v'	$+$	0	$-$

De aquí podemos deducir que el móvil alcanza su máxima velocidad en $x = 1$ (cuando lleva una hora de competición), y el valor de ésta lo obtenemos sustituyendo en la expresión de la función $v = (2 - x)\, e^x$, es decir, la velocidad máxima sería $v_m = (2 - 1)\, e^1 = e$, en cientos de kilómetros por hora (unos 272 km/h).

Por otra parte, y como podemos observar en la misma tabla, el móvil gana velocidad en el intervalo [0, 1), para ir perdiéndola posteriormente en (1, 2].

Para conocer el momento en el que se detiene basta con igualar la velocidad a cero, y tendremos:

$$v = 0, v = (2 - x)\, e^x = 0, x = 2$$

es decir, a las dos horas de competición.

Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

A partir de la ecuación explícita de una función, definida en todos los números reales excepto para dos valores concretos y, por tanto, discontinua en ellos, se pide encontrar el valor que debería tomar la función en uno de ellos, para que así fuese continua en él.

En la resolución tendremos en cuenta que se trata de una discontinuidad evitable, y que si bien la función no está definida en $x = 3$, sí que podemos calcular el límite de la función cuando x se acerca a 3. Además recordemos que para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 3$, $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

Resolución

Si para que sea continua $f(3)$ ha de coincidir con $\lim f(x)$, calculemos dicho límite y tendremos el valor de $f(3)$ buscado:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x - 3)\,(x + 3)}{(x - 3)\,(x - 2)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x + 3}{x - 2} = 6$$

luego la función será continua en $x = 3$, si $f(3) = 6$.

Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se dispone de una caja de golosinas con 6 caramelos y 4 chocolatinas, y el experimento aleatorio consiste en sacar cuatro golosinas al azar; se pide la probabilidad de dos sucesos A = «coger las 4 chocolatinas», y B = «coger dos caramelos y dos chocolatinas».

Típico problema de distribución binomial de parámetros $n = 4$ y $p = 6/10$.

Resolución

P(«sacar caramelos») = 6/10 ; P(«sacar chocolatinas») = 4/10

a) $P(A) = P$(«coger las 4 chocolatinas») =

$$= \binom{4}{4}(4/10)^4 (6/10)^0 = 0{,}0256$$

b) $P(B) = P$(«coger dos caramelos y dos chocolatinas») =

$$= \binom{4}{2}(4/10)^2 (6/10)^2 = 0{,}3456$$

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da la relación de alturas de veinte personas, y se pide, en primer lugar, la construcción de la tabla de frecuencias, fijado ya en el enunciado el tamaño de la clase o intervalo para datos agrupados. Posteriormente, y apoyándonos en esta distribución, se pide el cálculo de la media. Y, por último, el cálculo directo de la media, así como la explicación de por qué el resultado es distinto según el procedimiento seguido.

En la resolución utilizaremos las fórmulas ya familiares de la media tanto para datos agrupados como no agrupados.

Resolución

a) Tabla de frecuencias:

I_i	m_i	f_i
[140-150)	145	1
[150-160)	155	5
[160-170)	165	4
[170-180)	175	5
[180-190)	185	3
[190-200)	195	2

b) La media para datos agrupados:

$$x = \frac{\Sigma m_i f_i}{20} = 170 \text{ cm}$$

La media para datos no agrupados:

$$x = \frac{\Sigma x_i f_i}{20} = 169 \text{ cm}$$

No coinciden, ya que en los datos agrupados al elegir la marca de clase como dato representativo del intervalo o clase estamos haciendo una aproximación.

REPERTORIO B

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un ejercicio de optimización, planteado a partir de un supuesto práctico, en el que aparecen enunciadas de forma coloquial las condiciones de restricción. Se nos pide que encontremos la zona de validez que determinan las condiciones de restricción y, por último, hallar en ella los valores de las variables que hacen máxima la función beneficio.

Representaremos la región de validez y calcularemos el valor de la función beneficio en los vértices de la región.

Resolución

Si x e y son, respectivamente, el número de artículos A y B producidos por la empresa en ambas fábricas, busquemos las condiciones de restricción utilizando como recurso una sencilla tabla de doble entrada en la que tendremos en cuenta el costo en días-operario para la fabricación de ambos artículos en sendas fábricas.

	1.ª fábrica	2.ª fábrica
Artículo *A*	$6x$	$2x$
Artículo *B*	$2y$	$2y$
Total días-operario por fábrica	$6x + 2y$	$2x + 2y$

Atendiendo a las indicaciones del enunciado, en la primera fábrica se encuentra limitada la producción en días-operario a 300, y en la segunda a 140, por tanto,

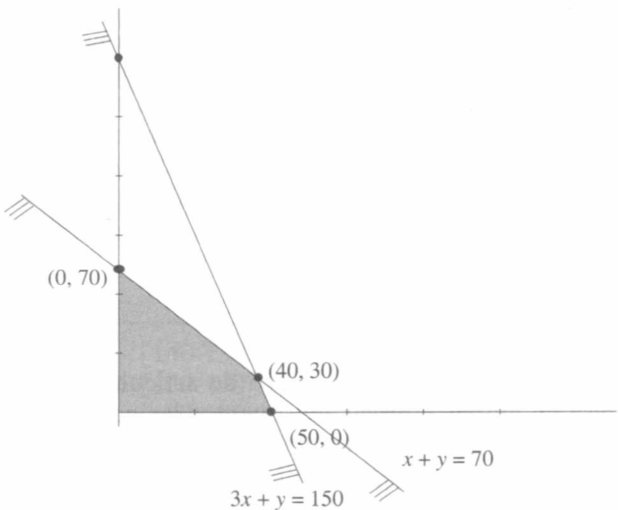
$$6x + 2y \leqslant 300$$
$$2x + 2y \leqslant 140$$

Si suponemos que el número de artículos ha de ser en ambos casos una cantidad positiva tendremos que

$$x \geqslant 0$$
$$y \geqslant 0$$

con lo que tenemos las condiciones de restricción buscadas.

La región de validez queda representada en el siguiente gráfico:



La función beneficio es $B(x, y) = 600x + 300y$, que en los vértices resulta:

$B(0, 0) = 0$
$B(0, 70) = 21.000$
$B(50, 0) = 30.000$
$B(40, 30) = 33.000$

de aquí que el máximo beneficio se obtenga fabricando 40 artículos del tipo A y 30 del tipo B.

Cuestión 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

A partir de la expresión explícita de una función racional, se nos pide que encontremos los máximos y mínimos de dicha función. También se nos pregunta sobre la existencia de puntos de inflexión.

En la resolución recurriremos al cálculo de la primera derivada, y a la confección de una tabla sobre su monotonía que nos permita encontrar los máximos y mínimos. En cuanto a los puntos de inflexión, quizá no haga falta utilizar la segunda derivada, sino un sencillo esbozo de su gráfica, pues únicamente se nos pregunta sobre la existencia de éstos.

Resolución

Primera derivada:

$$y' = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0, \text{ si } x = 0, \pm\sqrt{3}$$

Antes de confeccionar la tabla hemos de tener en cuenta que la función tiene dos asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$.

Tabla:

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, +\infty)$
y	$\nearrow$	$\cap$	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	$\cap$	$\nearrow$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$

De donde podemos deducir que la función tiene un máximo en $(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/2)$ y un mínimo en $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/2)$.

En cuanto a los puntos de inflexión, bastará con realizar un esbozo de la función, observando que:

- Se trata de una función impar $f(-x) = -f(x)$.
- Sus tendencias en los laterales de las asíntotas:

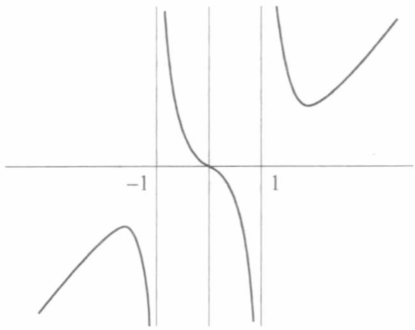
$$\lim_{x \to -1+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -1-} f(x) = -\infty$$

y

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$$

- Es decreciente en el intervalo $(-1, 1)$.

Esbozo:



Claramente se observa que debe haber un punto de inflexión en el $(0, 0)$.

Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se dan tres probabilidades de sendos experimentos independientes, y se piden otras de sucesos relacionados con ellos.

Recurriremos a las propiedades sobre probabilidades de sucesos. Para la resolución, necesitamos entender que un semáforo se encuentra en verde cuando no está en rojo, al no haber manera de encontrar la probabilidad de ámbar y verde por separado con los datos del ejercicio.

Resolución

P(«luz roja en el 1.^{er} semáforo») $= P(R_1) = 0{,}4$
P(«luz roja en el 2.^{o} semáforo») $= P(R_2) = 0{,}8$
P(«luz roja en el 3.^{er} semáforo») $= P(R_3) = 0{,}5$

P(«luz verde en el 1.^{er} semáforo») $= P(V_1) = 0{,}6$
P(«luz verde en el 2.^{o} semáforo») $= P(V_2) = 0{,}2$
P(«luz verde en el 3.^{er} semáforo») $= P(V_3) = 0{,}5$

a) $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1) \cdot P(R_2) \cdot P(R_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}16$

b) $P(R_1 \cap V_2 \cap V_3) + P(V_1 \cap R_2 \cap V_3) + P(V_1 \cap V_2 \cap R_3) =$
$= P(R_1) \cdot P(V_2) \cdot P(V_3) + P(V_1) \cdot P(R_2) \cdot P(V_3) + P(V_1) \cdot P(V_2) \cdot$
$\cdot P(R_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}04 +$
$+ 0{,}24 + 0{,}06 = 0{,}34$

Cuestión 4

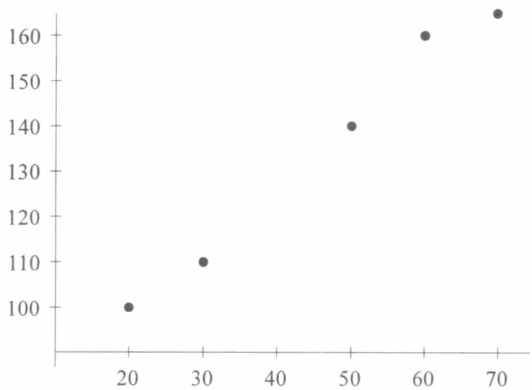
Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da la tabla de una distribución bidimensional, y se pide estudiar la correlación entre las variables mediante la representación gráfica de la nube de puntos, y la determinación de la recta de regresión.

Los cálculos los haremos a partir de las fórmulas correspondientes.

Resolución

a) Diagrama de dispersión:



b) Recta de regresión:

Las medias:

$$x = \frac{\Sigma x_i}{5} = 46 \quad ; \quad y = \frac{\Sigma y_i}{5} = 135$$

La varianza:

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma(x_i - x)^2}{5} = 344$$

La covarianza:

$$\sigma_{xy} = \frac{\Sigma x_i y_i}{5} - xy = 480$$

La recta de regresión:

$$y - y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - x) \quad ; \quad y - 135 = 1{,}39(x - 46)$$

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

A partir de los parámetros de centralización y de dispersión de una distribución estadística de valores x_i, calcular los mismos parámetros de una distribución que se obtiene de la anterior sumando a cada valor una cantidad constante.

En la resolución utilizaremos cada una de las definiciones de dichos parámetros, sin olvidar que los parámetros de dispersión de alguna manera lo que miden es la separación con respecto de la media.

Resolución

La Media de la segunda distribución es la Media de la primera más 0,43:

Media primera distribución:

$$x = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

Media segunda distribución:

$$x' = \frac{\Sigma(x_i + 0{,}43)}{n} = = \frac{\Sigma x_i + n\ 0{,}43}{n} = \frac{\Sigma x_i}{n} + 0{,}43 = x + 0{,}43$$

La Moda de la segunda distribución es la Moda de la primera más 0,43, pues se trata del valor más repetido, y al sumar la misma cantidad a cada uno de ellos, el valor elegido como moda en el primer momento sigue siendo el más repetido posteriormente, aunque eso sí, sumándole 0,43.

Con la mediana pasa lo mismo. Se trata de la anterior más 0,43. El valor que ocupa la posición central sigue ocupándola tras la suma, aunque eso sí, sumándole 0,43.

Sin embargo, con las medidas de dispersión la situación es diferente. Todas las nuevas coinciden con las anteriores.

La nueva desviación típica coincide con la anterior a la suma:

Desviación típica de la primera distribución:

$$\sigma_x = \frac{\Sigma(x_i - x)^2}{n}$$

Desviación típica de la segunda distribución:

$$\sigma'_x = \frac{\Sigma[(x_i + 0{,}43) - (x + 0{,}43)]^2}{n} =$$

$$= \frac{\Sigma[(x_i + 0{,}43 - x - 0{,}43)]^2}{n} =$$

$$= \frac{\Sigma(x_i - x)^2}{n} = \sigma_x$$

La nueva varianza coincide con la anterior a la suma, ya que las varianzas no son más que las desviaciones típicas al cuadrado, y estas últimas coinciden como acabamos de ver.

En cuanto al recorrido, también se mantiene, ya que es la diferencia entre los valores extremos de la distribución.

PRUEBA DE SELECTIVIDAD V

COU

Matemáticas II (Obligatoria)

Distrito Universitario de Madrid. Junio de 1996.

INSTRUCCIONES PREVIAS

- El tiempo disponible para la realización de la prueba es de una hora y treinta minutos.
- El alumno desarrollará uno de los dos repertorios siguientes, y dará respuestas claras y concisas a cada una de las cinco cuestiones. El número de repertorio elegido debe figurar al principio del ejercicio.
- *Calificación:* La calificación máxima de cada uno de los cinco ejercicios será de 2 puntos.

REPERTORIO A

CUESTIÓN 1

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar una matriz $A \neq -I$ tal que $A^2 + 2A + I = O$, siendo $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

CUESTIÓN 2

Calcular los puntos del recinto

$$\begin{cases} 2x + y \geqslant 20 \\ 2x - y \leqslant 20 \\ 0 \leqslant y \leqslant 20 \end{cases}$$

que hacen mínima o máxima la función $z = 2x + y$. ¿Cuántas soluciones hay?

CUESTIÓN 3

Esbozar la gráfica de

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

calculando asíntotas, máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

CUESTIÓN 4

En un juego contra un adversario igual, tal que el juego no puede acabar en empate, ¿qué es más probable, ganar exactamente 3 juegos de 6 o exactamente 5 de 10?

CUESTIÓN 5

Se han obtenido las pulsaciones de un equipo de atletas después de una carrera. Los datos obtenidos son los siguientes:

Pulsaciones	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94	95-99
Número de atletas	3	3	7	10	12	8

Se pide:

a) Las marcas de clase.
b) El intervalo mediano.
c) El coeficiente de variación, es decir, el cociente entre la desviación típica y el valor absoluto de la media.

REPERTORIO B

CUESTIÓN 1

Sean A y B matrices de tres filas y tres columnas. Indicar cuándo es cierta la igualdad

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

y dar un ejemplo en el que dicha igualdad sea falsa.

CUESTIÓN 2

Si se mezclan 60 litros de vino blanco con 20 litros de vino tinto se obtiene un vino de 10 grados (10 por 100 de alcohol). Si, por el contrario, se mezclan 20 litros de blanco con 60 litros de tinto, se obtiene un vino de 11 grados. ¿Qué graduación tendrá una mezcla de 40 litros de blanco y 40 litros de tinto?

CUESTIÓN 3

Hallar el área comprendida entre las curvas

$$y = x^4 + 1$$
$$y = -x^2 + 3$$

CUESTIÓN 4

Se lanza al aire cuatro veces una moneda equilibrada. Hallar la probabilidad de que:

a) Salga alguna cara.
b) Salga un número impar de caras.

CUESTIÓN 5

Las puntuaciones obtenidas en un test por 11 alumnos son:

21, 36, 19, 23, 32, 25, 28, 20, 34, 33, 31

Se pide:

a) Determinar la mediana.
b) ¿Qué porcentaje de alumnos tiene puntuación menor que 32?

RESOLUCIÓN DE LA PRUEBA

REPERTORIO A

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se dan algunas condiciones que cumple una desconocida matriz cuadrada de 2.º orden, y nos piden que la obtengamos.

En su determinación sustituiremos las matrices del enunciado en la identidad

$$A^2 + 2A + I = O$$

y operaremos imponiendo, por último, a la matriz A la condición de que $A \neq -I$.

Resolución

Como $A^2 + 2A + I = O$, se cumple que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 + bc + 2a + 1 &= 0 \\ ab + bd + 2b &= 0 \\ ca + dc + 2c &= 0 \\ cb + d^2 + 2d + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} a^2 + bc + 2a &= -1 \\ b(a + d + 2) &= 0 \\ c(a + d + 2) &= 0 \\ cb + d^2 + 2d &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Para que se cumplan en el sistema (1) las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} b(a + d + 2) &= 0 \\ c(a + d + 2) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

debe ocurrir que $b = c = 0$ o que $(a + d + 2) = 0$.

Si $b = c = 0$, sustituyendo en (1), tendremos que $a = d = -1$, lo que implicaría que $A = -I$, condición que no puede darse según el enunciado.

Si $a + d + 2 = 0$, se ha de cumplir que $a + d = -2$. Así, si damos, por ejemplo, los valores $a = -2$ y $d = 0$ y sustituimos en las otras dos ecuaciones del sistema (1), tendremos que

$$\begin{aligned} a^2 + bc + 2a = -1 &\rightarrow (-2)^2 + bc + 2(-2) = -1 \rightarrow bc = -1 \\ cb + d^2 + 2d = -1 &\rightarrow cb + (0)^2 + 2(0) \quad\;\; = -1 \rightarrow cb = -1 \end{aligned}$$

de manera que si tomamos, por ejemplo, $b = 1$ y $c = -1$, según los valores dados, la matriz buscada será:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

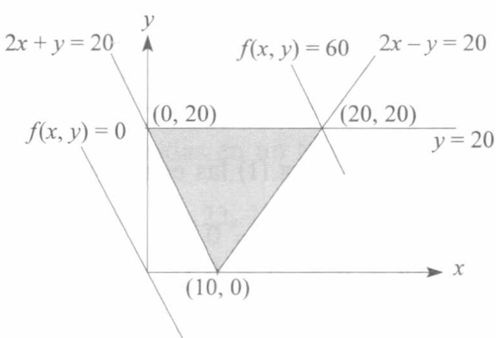
Cuestión 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un ejercicio de optimización planteado sin ningún contexto práctico. Tanto las condiciones de restricción como la función a optimizar aparecen ya enunciadas de forma matemática.

Para obtener los puntos pedidos representaremos la región de validez y después calcularemos los valores máximo y mínimo de $z = 2x + y$ en los vértices de dicha región.

Resolución



Tiene un máximo en (20, 20), $z_{\text{máximo}} = 60$.

Los valores mínimos los encontramos en todos los puntos del segmento de la recta $2x + y = 20$, que se encuentran entre (0, 20) y (10, 0), es decir, infinitos, y el valor de la función es $z_{\text{mínimo}} = 20$.

Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de esbozar la gráfica de la función dada en su forma explícita mediante la ayuda del cálculo de asíntotas y el estudio de su monotonía.

Para el estudio de la monotonía (crecimiento y decrecimiento) recurriremos al cálculo de la primera derivada y a la confección de una tabla. En cuanto al esbozo de la gráfica, tendremos en cuenta su simetría, así como sus ramas infinitas.

Resolución

Asíntotas:

Verticales: $x = 0$

Horizontales: No tiene.

Oblicuas: $y = mx + n$, en donde:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 + 1}{x} - x\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por tanto, $y = x$.

Primera derivada:

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0, \quad \text{si } x = \pm 1$$

Antes de confeccionar la tabla debemos tener en cuenta que la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

Tabla:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y	$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$		$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$

de modo que podemos deducir que la función es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$, tiene un máximo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo en $(1, 2)$.

Otros datos:

Se trata de una función impar, ya que

$$f(-x) = \frac{[(-x)^2 + 1]}{-x} = -\frac{x^2 + 1}{x} = -f(x)$$

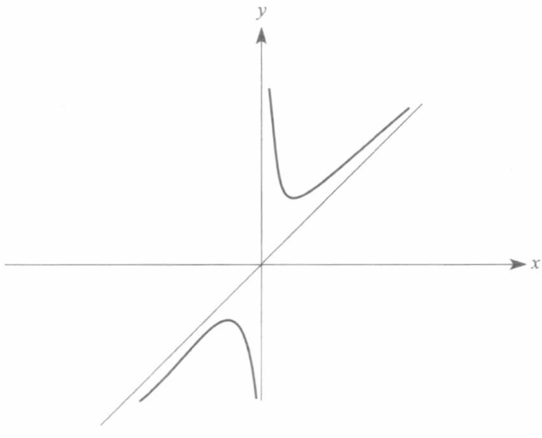
Las tendencias en los laterales de la asíntota vertical son

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

Las ramas infinitas son

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Esbozo:



Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se plantea un problema de probabilidad en el que sólo existen las posibilidades de éxito o fracaso (recuerda el enunciado: «... el juego no puede acabar en empate»). Además, existe la misma probabilidad de ganar que de perder (ambos adversarios son iguales). Nos piden que determinemos si es más probable ganar 3 juegos de 6 que 5 de 10.

Ya que en ambos casos, tanto 3 de 6 como 5 de 10, los juegos ganados son la mitad del total, puede parecer que ninguno de los dos sucesos es más probable que el otro, sino que por el contrario son iguales. En realidad no es así, y para ello calcularemos ambas probabilidades, teniendo en cuenta que en los dos casos se pueden calcular mediante la distribución binomial de probabilidad. En el caso de 3 ganados de 6 jugados se trata de $B(1/2, 6)$, mientras que para el cálculo de la probabilidad de ganar 5 de 10 es $B(1/2, 10)$.

Resolución

Probabilidad de ganar 3 juegos de 6:

$$\binom{6}{3} (1/2)^3 \, (1/2)^3 = 0{,}3125$$

Probabilidad de ganar 5 juegos de 10:

$$\binom{10}{5} (1/2)^5 \, (1/2)^5 = 0{,}2461$$

De esta manera, podemos decir que, con las condiciones del ejercicio, es más probable ganar 3 juegos de 6 que 5 de 10.

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da una tabla estadística en la que aparecen, por intervalos, las pulsaciones de 43 atletas. Se piden, en distintos apartados, las marcas de clase, el intervalo mediano y el coeficiente de variación.

En el cálculo de las marcas de clase, debemos tener en cuenta que éstas son los valores centrales de cada intervalo. El intervalo mediano se refiere al intervalo en el que se encuentra la mediana (en su determinación recomendamos utilizar las frecuencias acumuladas). El coeficiente de variación, por último, se obtiene al dividir la desviación típica y el valor absoluto de la media (que hemos de calcular).

Resolución

a) Para el cálculo de cada marca de clase, se suman ambos extremos del intervalo y se dividen entre dos. Así, obtenemos la siguiente tabla de frecuencias:

x_i	m_i	f_i	$(f_i)_a$
[70, 74]	72	3	3
[75, 79]	77	3	6
[80, 84]	82	7	13
[85, 89]	87	10	23
[90, 94]	92	12	35
[95, 99]	97	8	43

b) El intervalo mediano es aquel en el que se encuentra la mediana. Para la determinación de ésta, dividimos el número total de valores, 43, entre 2, y obtenemos el lugar 21,5. Atendiendo a la columna de frecuencias acumuladas $(f_i)_a$, observamos que el lugar 22.° se encuentra en el intervalo [85, 89] o intervalo mediano.

c) Coeficiente de variación CV $= \sigma/|x|$.

Se calcula la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 f_i}{n} - x^2} = 7{,}17$$

La media se obtiene:

$$x = \frac{\Sigma x_i f_i}{n} = 87{,}70$$

Luego el coeficiente de variación será:

$$\mathrm{CV} = \frac{7{,}20}{87{,}70} = 0{,}08$$

REPERTORIO B

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se dan dos matrices A y B, ambas de 3.er orden, y una identidad. Se nos pide, en primer lugar, las condiciones que han de cumplir las matrices dadas para que se verifique la identidad, y en segundo lugar, ejemplos de matrices A y B que no cumplan la identidad.

Operaremos las matrices del primer miembro de la identidad, y observando la igualdad entre ambos miembros encontraremos inmediatamente la condición buscada.

Resolución

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Si operamos, tenemos que

$$A^2 - BA + AB - B^2 = A^2 - B^2$$

y como se puede observar, para que ambos miembros sean iguales es necesario que

$$-BA + AB = O$$

o lo que es lo mismo:

$$AB = BA$$

Es decir, la identidad es cierta siempre que entre las matrices A y B se cumpla la propiedad conmutativa.

La identidad será falsa cuando $AB \neq BA$, por ejemplo, si A y B son las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuestión 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se dan las composiciones de dos mezclas:

1.ª 60 litros de vino blanco y 20 de tinto con 10 % de alcohol.
2.ª 20 litros de vino blanco y 60 de tinto con 11 % de alcohol.

Y nos piden hallar la proporción de alcohol en una nueva mezcla de 40 litros de vino blanco y 40 de tinto.

Para resolver el ejercicio planteamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Cada incógnita será la proporción de alcohol en cada uno de los tipos de vino, y las ecuaciones se basarán en el hecho de que la cantidad de alcohol de la mezcla corresponde a la suma de las cantidades de alcohol de cada componente.

Resolución

Sean:

x = porcentaje de alcohol de vino blanco.

y = porcentaje de alcohol de vino tinto.

1.ª mezcla:

Cantidad de alcohol en los 60 litros de vino blanco $= 60 \cdot x/100$.
Cantidad de alcohol de los 20 litros de vino tinto $= 20 \cdot y/100$.
Cantidad de alcohol de la 1.ª mezcla $= (60 + 20) \cdot 10/100$.

2.ª mezcla:

Cantidad de alcohol en los 20 litros de vino blanco $= 20 \cdot x/100$.
Cantidad de alcohol de los 60 litros de vino tinto $= 60 \cdot y/100$.
Cantidad de alcohol en la 2.ª mezcla $= (20 + 60) \cdot 11/100$.

Así, el sistema queda:

$$\left.\begin{aligned} 60 \cdot x/100 + 20 \cdot y/100 &= (60 + 20) \cdot 10/100 \\ 20 \cdot x/100 + 60 \cdot y/100 &= (20 + 60) \cdot 11/100 \end{aligned}\right\}$$

Operando y simplificando:

$$\left.\begin{aligned} 6x + 2y &= 80 \\ 2x + 6y &= 88 \end{aligned}\right\}$$

Si resolvemos el sistema, tenemos que $x = 9{,}5$ e $y = 11{,}5$.

Con esta graduación en los distintos tipos de vino, para conocer la de la muestra z basta con operar como sigue:

$$40 \cdot 9{,}5/100 + 40 \cdot 11{,}5/100 = (40 + 40) \cdot z/100$$

Si despejamos, tenemos $z = 10{,}5$, que es la graduación buscada.

Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se pide calcular el área de una región del plano que se encuentra limitada por las gráficas de dos funciones dadas en su forma explícita.

Buscaremos los puntos de intersección entre ambas funciones, para resolver posteriormente la integral definida entre dichos límites. Como se trata de dos funciones sencillas, conviene realizar un esbozo de sus gráficas, para hacernos una idea más clara de la situación.

Resolución

Puntos de intersección:

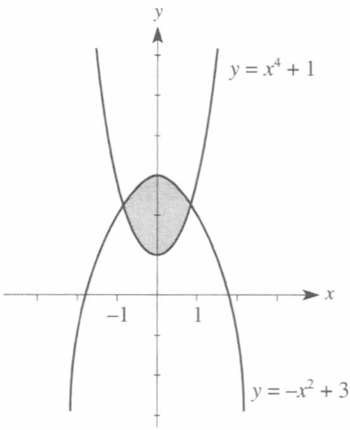
Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} y &= x^4 + 1 \\ y &= -x^2 + 3 \end{aligned}$$

y tenemos:

$$x_1 = 1 \text{ y } x_2 = -1$$

Representación gráfica:



Integral definida:

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 3 - x^4 - 1)\, dx =$$

$$= -x^3/3 + 3x - x^5/5 - x \Big]_{-1}^{1} = 2{,}94 \text{ u.s.}$$

Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se plantea un problema de probabilidad en el que, tras lanzar una moneda 4 veces, se pide la probabilidad de los sucesos «que salga alguna cara» y «que salga un número impar de caras».

Es un típico problema de probabilidad que se ajusta a una distribución binomial, en la que los parámetros son $n = 4$ y $p = 1/2$. Para el cálculo de la probabilidad del primer suceso utilizaremos la propiedad de la probabilidad del suceso contrario.

Resolución

a) El suceso «que salga alguna cara» es el contrario del suceso «que no salga ninguna cara», cuya probabilidad es más fácil calcular; por tanto:

$$P(\text{«que salga alguna cara»}) = 1 - P(\text{«que no salga ninguna cara»}) =$$
$$= 1 - 0{,}0625 = 0{,}9375$$

$$P(\text{«que no salga ninguna cara»}) = \binom{4}{0} (0{,}5)^4 (0{,}5)^0 = 0{,}0625$$

b) $P(\text{«que salga un número impar de caras»}) =$

$$= P(\text{«que salga 1 cara»}) + P(\text{«que salgan 3 caras»}) =$$

$$= \binom{4}{1} (0{,}5)^1 (0{,}5)^3 + \binom{4}{3} (0{,}5)^3 (0{,}5)^1 = 0{,}5$$

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se dan las puntuaciones de 11 alumnos en un test. Se piden la mediana y el porcentaje de alumnos con puntuación menor que 32.

En la determinación de la mediana ordenaremos los valores en orden creciente, de forma que el valor central corresponderá a la mediana. En cuanto al porcentaje pedido, éste se obtendrá con un sencillo cálculo.

Resolución

a) 19, 20, 21, 23, 25, 28, 31, 32, 33, 34, 36
Como se trata de 11 valores, la mediana ocupa la posición 6.ª, que corresponde al valor 28.

b) Con un resultado menor de 32 puntos hay 7 valores; por tanto, el porcentaje pedido es $7 \cdot 100/11 = 63{,}64\ \%$.

PRUEBA DE SELECTIVIDAD VI

COU

Matemáticas II (Optativa)

Distrito Universitario de Madrid. Junio de 1996.

INSTRUCCIONES PREVIAS

- El tiempo disponible para la realización de la prueba es de una hora y treinta minutos.
- El alumno desarrollará uno de los dos repertorios siguientes, y dará respuestas claras y concisas a cada una de las cinco cuestiones. El número de repertorio elegido debe figurar al principio del ejercicio.
- *Calificación:* La calificación máxima de cada uno de los cinco ejercicios será de 2 puntos.

REPERTORIO A

CUESTIÓN 1

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \\ 9x + 10y + 11z = 12 \end{cases}$$

CUESTIÓN 2

Calcular los puntos del recinto

$$\begin{cases} 4x + y \geqslant 10 \\ x + y \leqslant 20 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

que hacen mínima o máxima la función $z = x + y$. ¿Cuántas soluciones hay?

CUESTIÓN 3

En un concurso nos ha correspondido un campo rectangular. Sus dimensiones debemos fijarlas nosotros con la condición de que su perímetro sea de 400 metros. ¿Qué dimensiones debe tener el campo para obtener el máximo de superficie?

CUESTIÓN 4

Una universidad afirma que el 75 % de sus graduados obtiene empleo durante el primer año de graduación. Se eligen 8 graduados de la citada universidad al azar. Se pide:

a) Probabilidad de que al menos 6 tengan empleo en el primer año.
b) Probabilidad de que como máximo 6 tengan empleo en el primer año.

CUESTIÓN 5

El número de días que faltaron al colegio los niños de una clase se recoge en la siguiente tabla:

Número de días	0	1	2	3	4	5	6	7	10	12
Frecuencia	9	5	4	3	2	2	1	1	1	1

a) Calcular la media y la desviación típica.
b) Calcular el tercer cuartil.

REPERTORIO B

CUESTIÓN 1

Calcular los valores de λ para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa.

CUESTIÓN 2

Hallar la posición relativa de los planos

$\pi_1 : x + 2y - z = 1$, $\pi_2 : 5x + 10y - 5z = 0$, $\pi_3 : 4x - 2y + z = 1$

CUESTIÓN 3

La función $y = x^3 - ax^2 + 4x + b$ corta al eje de abscisas en $x = 3$ y tiene un punto de inflexión en $x = \frac{2}{3}\cdot$ Hallar a y b.

CUESTIÓN 4

La urna *A* contiene 5 bolas blancas y 3 negras y la urna *B* tiene 3 bolas blancas y 2 negras. Se toma al azar una bola de *A* y, sin mirarla, se introduce en *B*. A continuación se extraen con reemplazamiento dos bolas de *B*. Hallar la probabilidad de que sean de distinto color.

CUESTIÓN 5

Se ha medido el contenido en oxígeno *Y* (en mg/litro) de un lago a una profundidad de *X* metros, obteniéndose los siguientes datos:

X	15	20	30	40	50	60	70
Y	6,5	5,6	5,4	6	4,6	1,4	0,1

La recta de regresión es

$$Y - 4{,}22 = \frac{-38{,}59}{360{,}5}(X - 40{,}71)$$

Se pide:

a) Coeficiente de correlación y conclusión estadística.
b) Para una profundidad de 55 metros, ¿qué contenido en oxígeno se podría predecir?

RESOLUCIÓN DE LA PRUEBA

REPERTORIO A

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de resolver un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas. En su resolución utilizaremos el método de Gauss.

Resolución

$$\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{c} E_1' \\ E_2' \\ E_3' \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\xrightarrow{(2)} \begin{array}{c} E_1'' \\ E_2'' \\ E_3'' \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado, que se puede expresar como

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 4 \\ -4y - 8z = -12 \end{array}\right\}$$

Si despejamos en función de z, obtenemos por solución

$$(-2 + z, 3 - 2z, z)$$

$$(1)\begin{cases} E_1' = E_1 \\ E_2' = E_2 - 5E_1 \\ E_3' = E_3 - 9E_1 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} E_1'' = E_1' \\ E_2'' = E_2' \\ E_3'' = E_3' - 2E_2' \end{cases}$$

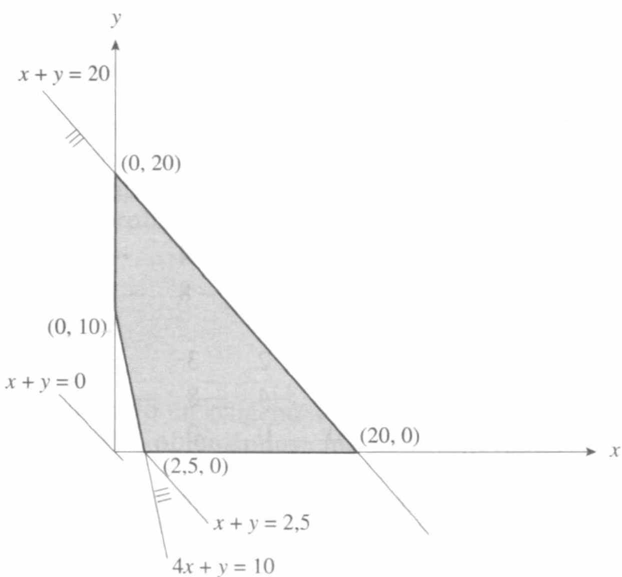
Cuestión 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un ejercicio de optimización planteado sin ningún contexto práctico. Tanto las condiciones de restricción como la función a optimizar aparecen ya enunciadas de forma matemática.

Para obtener los puntos pedidos, representaremos la región de validez y después calcularemos los valores mínimo y máximo de $z = x + y$ en los vértices de dicha región.

Resolución



Tiene un valor mínimo en (2,5, 0), $z_{\text{mínimo}} = 2{,}5$.

Los valores máximos los encontramos en todos los puntos del segmento de la recta $x + y = 20$, que se encuentran entre (0, 20) y (20, 0), puesto que la función objetivo ($z = x + y$) es paralela a la recta $x + y = 20$, y su valor es $z_{\text{máximo}} = 20$.

Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se pide determinar las dimensiones de un campo rectangular, que cumpla las condiciones de que su perímetro sea de 400 metros y su área la máxima posible.

Para resolver este ejercicio, en primer lugar encontraremos la función que relaciona la superficie S con las dos dimensiones x e y. A través de la condición que se refiere al perímetro p, haremos que esta función superficie quede en función de una sola dimensión x. Por último, con los valores que anulan la derivada S', hallaremos el valor de la dimensión que hace máxima la función superficie. A partir de éste, y volviendo a utilizar las condiciones dadas, obtendremos la otra dimensión.

Resolución

La función que relaciona la superficie S con las dos dimensiones x e y es

$$S = x \cdot y$$

Si aplicamos la condición relativa al perímetro p:

$$p = 2x + 2y \rightarrow 400 = 2x + 2y \rightarrow 200 = x + y \rightarrow y = 200 - x$$

sustituimos en la función superficie:

$$S = x(200 - x) = 200x - x^2$$

y, por último, derivamos e igualamos a cero, encontraremos el valor de la dimensión que hace máxima la función superficie:

$$S' = 200 - 2x = 0; \quad x = 100$$

Se trata de un máximo, ya que la segunda derivada es negativa, $S'' = -2$.

La otra dimensión será $y = 200 - x = 200 - 100 = 100$.

Así pues, la máxima superficie la conseguimos con un cuadrado de lado 100.

Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da, en tanto por ciento, la probabilidad de que, elegido al azar uno de los graduados de una universidad, haya conseguido trabajo durante su primer año de graduado. Se pide, en primer lugar, que si se eligen 8 graduados de dicha universidad al azar, al menos 6 tengan empleo el primer año, y en segundo lugar, la probabilidad de que como máximo 6 tengan empleo en el primer año.

En la resolución tendremos en cuenta que 0,75 es la probabilidad de que, elegido al azar uno de los graduados de una universidad, haya conseguido trabajo durante su primer año de graduado, y que se trata de una distribución binomial de parámetros $p = 0{,}75$ y $n = 8$. Además, simplificaremos cálculos si aplicamos la propiedad de la probabilidad del suceso contrario.

Resolución

P(«encuentra empleo durante el primer año») = 0,75
P(«no encuentra empleo durante el primer año») = 0,25

a) P(«al menos 6 tengan empleo en el primer año») =

= P(«6 tengan empleo en el primer año» +

+ P(«7 tengan empleo ...») + P(«8 tengan empleo ...») =

$$= \binom{8}{6}(0{,}75)^6(0{,}25)^2 + \binom{8}{7}(0{,}75)^7(0{,}25)^1 + \binom{8}{6}(0{,}75)^8(0{,}25)^0 = 0{,}68$$

b) Los sucesos «como máximo 6 tengan empleo en el primer año» y «al menos 6 tengan empleo en el primer año» no son contrarios, ya que ambos incluyen el caso $r = 6$.

P(«como máximo 6 tengan empleo en el primer año») =

= 1 − P(«al menos 6 tengan empleo en el primer año») +

+ P(«exactamente 6 tengan empleo en el primer año») =

$$= 0{,}32 + \binom{8}{6} (0{,}75)^6 (0{,}25)^2 = 0{,}63$$

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se dan los valores que toma una variable estadística y la frecuencia de cada uno de ellos, y se piden los valores de los parámetros media y desviación típica, así como el tercer cuartil.

En el cálculo de los valores pedidos utilizaremos las fórmulas necesarias.

Resolución

a) La media:

$$x = \frac{\Sigma x_i f_i}{n} = 2{,}59$$

La desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 f_i}{n} - x^2} = 3{,}02$$

b) Por lo que se refiere al tercer cuartil, por debajo de él se encontrará el 75 % de los valores de la población. Para su cálculo, dividimos el número total de individuos por 4 y lo multiplicamos por 3 (tercer cuartil):

$$\left(\frac{29}{4}\right) \cdot 3 = 21{,}75$$

luego corresponde al valor que ocupa la posición 22.ª Para encontrarlo, utilizaremos las frecuencias acumuladas, en donde vemos que el tercer cuartil es el valor 4.

x_i	f_i	$(f_i)_a$
0	9	9
1	5	14
2	4	18
3	3	21
4	2	23
5	2	25
6	1	26
7	1	27
10	1	28
12	1	29

REPERTORIO B

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da una matriz cuadrada de tercer orden en la que algunos de sus elementos vienen definidos en función de un parámetro λ. Se nos pide calcular los valores que ha de tomar el parámetro λ para que la matriz tenga inversa.

Para que exista la matriz inversa de la matriz dada es necesario que su determinante sea distinto de cero.

Resolución

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \overset{*}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 - \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ \lambda - 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda - 1$$

Así, este determinante es distinto de cero siempre que $\lambda \neq 1$, o lo que es lo mismo, la matriz tiene inversa cuando λ no valga 1.

* El valor del determinante no varía cuando a la 2.ª y 3.ª columnas le restamos la 1.ª

Cuestión 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se presentan tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, que representan las ecuaciones de sendos planos. Se pide que encontremos la posición relativa de éstos.

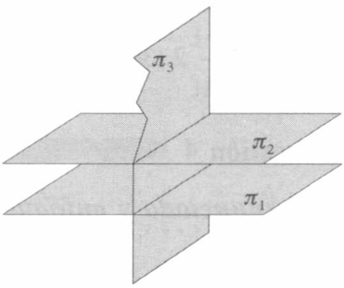
Una manera de resolver este ejercicio consiste en estudiar las soluciones del sistema formado por las tres ecuaciones. Para ello, aplicaremos el método de Gauss.

Resolución

$$\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{c} E_1' \\ E_2' \\ E_3' \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -10 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Se trata de un sistema incompatible, ya que la segunda de las ecuaciones no tiene solución. Esto lo interpretamos geométricamente diciendo que no hay puntos comunes a los tres planos. En cuanto a la posición relativa, los planos π_1 y π_2 son paralelos (los coeficientes de las incógnitas de sus ecuaciones son proporcionales, y no así el término independiente), mientras que π_3 corta a los otros dos.

$$(1)\begin{cases} E_1' = E_1 \\ E_2' = E_2 - 5E_1 \\ E_3' = E_3 - 4E_1 \end{cases}$$



Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da la ecuación explícita de una función polinómica de tercer grado, en la que se desconocen el coeficiente del término de segundo grado y el término independiente. Sabemos que la gráfica a la que representa corta al eje de abscisas en el punto (3, 0) y, además, tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 2/3$. Se pide que determinemos los coeficientes desconocidos.

En la resolución del problema tendremos en cuenta que al pasar la gráfica por el punto (3, 0), éste debe verificar la expresión de la función, y además, que la segunda derivada de la función se anula en el punto de inflexión. Si imponemos estas condiciones, obtendremos los coeficientes buscados.

Resolución

$$y(x) = x^3 - ax^2 + 4x + b$$

$$y'(x) = 3x^2 - 2ax + 4$$

$$y''(x) = 6x - 2a$$

Por tener un punto de inflexión para $x = 2/3$, $y''(2/3) = 0$, es decir,

$$y''(2/3) = 6(2/3) - 2a = 0 \rightarrow a = 2$$

Por pasar por el punto (3, 0), tenemos que $y(3) = 0$, es decir:

$$y(3) = 3^3 - a3^2 + 4(3) + b = 0$$

Como sabemos que $a = 2$, tenemos que

$$3^3 - 2\,(3^2) + 4(3) + b = 0 \rightarrow b = -21$$

Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

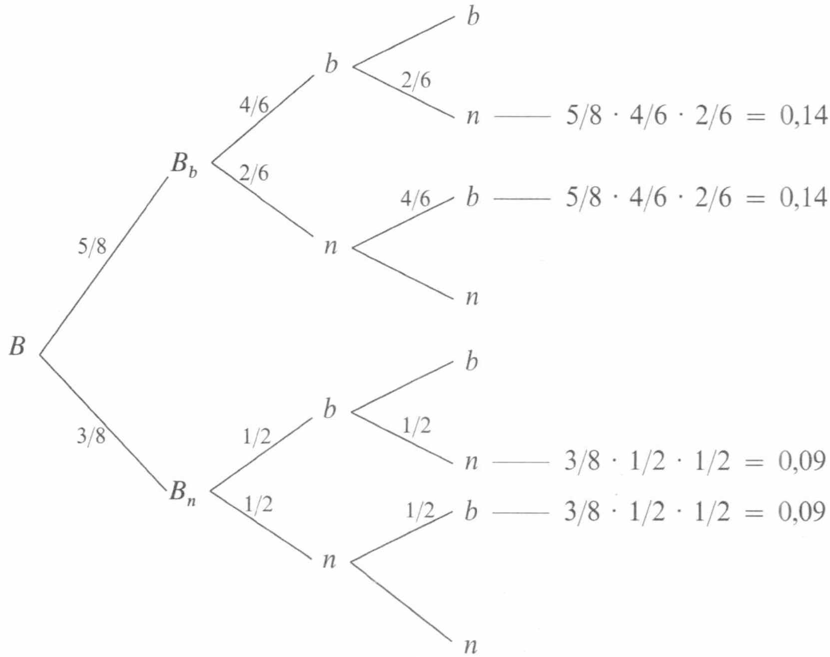
Disponemos de dos urnas, *A* y *B*, que contienen bolas blancas y bolas negras. El experimento aleatorio consiste en elegir al azar una bola de la urna *A*, introducirla en la *B*, y después extraer de ésta dos bolas con reemplazamiento, es decir, devolviendo la primera bola extraída antes de sacar la segunda. Se pide determinar la probabilidad del suceso «las dos bolas extraídas de *B* son de distinto color».

La resolución podemos plantearla teniendo en cuenta que se trata de un experimento aleatorio compuesto. En primer lugar, dependiendo de si la bola que pasa de *A* a *B* es blanca o negra, tendremos dos posibles configuraciones distintas de la urna *B* de la que, en segundo lugar, extraeremos las dos bolas. Proponemos la utilización del diagrama de árbol en la resolución.

Resolución

B_b = «la bola pasada de A a B es blanca».
b = «extraer bola blanca de la urna B».
B_n = «la bola pasada de A a B es negra».
n = «extraer bola negra de la urna B».

Urna B 1.ª extracción 2.ª extracción



$$P(\text{«sean de distinto color»}) = P(B_b \text{ y } b \text{ y } n) + P(B_b \text{ y } n \text{ y } b) +$$
$$+ P(B_n \text{ y } b \text{ y } n) + P(B_n \text{ y } n \text{ y } b) = 0{,}14 + 0{,}14 + 0{,}09 + 0{,}09 = 0{,}46$$

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da la tabla de frecuencias de una distribución bidimensional y la recta de regresión de la misma. Se pide, en primer lugar, el coeficiente de correlación y, a partir de él, una descripción de la distribución. En segundo lugar, se requiere que hagamos una previsión sobre el valor de Y cuando X es igual a 55 metros.

Para el cálculo del coeficiente de correlación ($\rho_{xy} = \sigma_{xy}/\sigma_x\sigma_y$) podemos utilizar la pendiente de la recta de regresión (σ_{xy}/σ_x^2), ya que, gracias a la forma en que nos viene dada, será suficiente con calcular σ_y. En la previsión, es suficiente si sustituimos en la recta de regresión.

Resolución

a) El coeficiente de correlación es

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

Al conocer la pendiente de la recta de regresión, en la forma dada en el enunciado, es decir, $-38{,}59/360{,}5$, y sabiendo que dicha pendiente es σ_{xy}/σ_x^2, podemos deducir que

$$\sigma_{xy} = -38{,}59, \quad \sigma_x = \sqrt{360{,}5} = 18{,}98$$

Utilizamos la calculadora para obtener $\sigma_y = 2{,}29$, y así el coeficiente de correlación es

$$\rho_{xy} = \frac{-38{,}59}{18{,}98 \cdot 2{,}29} = -0{,}89$$

Por lo que se refiere a la descripción de la distribución a partir del coeficiente de correlación, podemos decir que se trata de una distribución con correlación negativa, es decir, que a medida que aumenta la profundidad, disminuye el contenido de oxígeno. Además, por encontrarse su coeficiente de correlación próximo a 1, se puede considerar como una correlación fuerte entre ambas variables.

b) Para 55 metros de profundidad, el contenido de oxígeno es

$$Y = \frac{-38{,}59}{360{,}5}(55 - 40{,}71) + 4{,}22 = 2{,}69 \text{ mg/litro}$$

Nota: La ventaja para el cálculo del coeficiente de correlación podría ser una «trampa» si, en vez de darnos esta fracción, nos hubiesen dado una equivalente. No es esta la situación, pero por si acaso, y disponiendo de calculadora y tiempo, conviene hacer todos los cálculos.

PRUEBA DE SELECTIVIDAD VII

COU

Matemáticas II (Obligatoria)

Distrito Universitario de Madrid. Septiembre de 1996.

INSTRUCCIONES PREVIAS

- El tiempo disponible para la realización de la prueba es de una hora y treinta minutos.
- El alumno desarrollará uno de los dos repertorios siguientes, y dará respuestas claras y concisas a cada una de las cinco cuestiones. El número de repertorio elegido debe figurar al principio del ejercicio.
- *Calificación:* La calificación máxima de cada uno de los cinco ejercicios será de 2 puntos.

REPERTORIO A

CUESTIÓN 1

Se dice que dos matrices conmutan si $AB = BA$. Encontrar todas las matrices que conmutan con $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

CUESTIÓN 2

Dada la función $g(x, y) = 2x + y$ y las restricciones

$$\begin{cases} 0 \leqslant x - 3y + 7 \\ 1 \leqslant x + y \\ 1 \geqslant x - y \\ 0 \geqslant x + y - 5 \end{cases}$$

Hallar:

a) Los pares (x, y) para los que la función $g(x, y)$ toma sus valores máximo y mínimo.
b) Determinar los valores máximo y mínimo de $g(x, y)$.

CUESTIÓN 3

Hallar el área de la región finita del plano limitada por el eje de abscisas y la curva

$$y = x^3 - 2x^2$$

Esbozar la curva.

CUESTIÓN 4

Un estudio ha mostrado que en un determinado barrio de una gran ciudad, el 60 % de los hogares tiene al menos dos televisores. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio y se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan al menos dos televisores?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares tengan al menos dos televisores?

CUESTIÓN 5

La media de un conjunto de datos es 27 y la varianza es 4.

a) ¿En qué unidades se tendrán que expresar la media y la varianza si los datos están dados en metros?
b) ¿Se modifican la media y la varianza si los datos están dados en centímetros?

Justifique las respuestas.

REPERTORIO B

CUESTIÓN 1

Determinar el valor o valores de k para los que el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + ky = 6 \end{cases}$$

no tiene solución. Resuélvalo para $k = 5$.

CUESTIÓN 2

Una cooperativa debe construir al menos 45.000 metros cuadrados de viviendas. Debe construir viviendas de dos tipos. Las de tipo A son de 150 metros cuadrados y su coste es de 10 millones de pesetas. Las de tipo B tienen una superficie de 250 metros cuadrados y su coste es de 20 millones de pesetas. En total no pueden construirse más de 250 viviendas, y de las de tipo B se hará, a lo más, el doble que de las de tipo A. ¿Cuántas deben edificarse de cada tipo para que el coste sea mínimo?

CUESTIÓN 3

Representar gráficamente

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

y calcular el área encerrada entre $x = -1$ y $x = 1$.

CUESTIÓN 4

De una baraja de 40 cartas con cuatro palos (de diez cartas cada uno) se extraen cuatro cartas. Calcular la probabilidad de que:

a) Las cuatro sean del mismo palo (no importa el palo).
b) Las cuatro sean copas.

CUESTIÓN 5

Los valores de la variable talla, medida en centímetros, en una muestra de 50 estudiantes se recogen en la siguiente tabla:

Talla	155-164	165-174	175-184	185-194	195-204
Número de estudiantes	23	12	10	4	1

a) Calcular la media y la desviación típica.
b) ¿Cuál es la clase que contiene a la mediana?

RESOLUCIÓN DE LA PRUEBA

REPERTORIO A

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Dada una matriz cuadrada de dimensión 2, se pide la forma que han de tener todas las matrices que conmuten con ella.

En la resolución tendremos en cuenta que es necesario que estas matrices buscadas sean también cuadradas de dimensión 2. Partiremos de una matriz genérica A, a la que le impondremos la condición de conmutar con la matriz dada.

Resolución

Sean A todas las matrices cuadradas de dimensión 2 que conmutan con la matriz dada B:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se cumple, pues, que $A \cdot B = B \cdot A$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a + 2b \\ 0 & c + 2d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c \\ 0 &= 2c \\ a + 2b &= d \\ c + 2d &= 2d \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} c &= 0 \\ a + 2b &= d \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} c &= 0 \\ a &= d - 2b \end{aligned}\right\}$$

para b y d cualesquiera.

Por tanto, las matrices buscadas tendrán la forma

$$A = \begin{pmatrix} d - 2b & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Cuestión 2

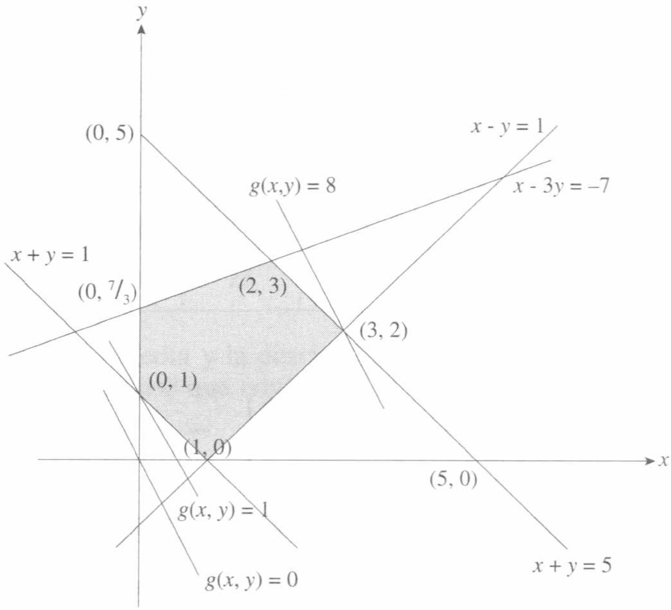
Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un ejercicio de optimización planteado sin ningún contexto práctico. Tanto las condiciones de restricción como la función a optimizar aparecen ya enunciadas de forma matemática. Se nos pide que, en la zona de validez dada, encontremos los valores máximos y mínimos de la función $g(x, y)$.

Representaremos la región de validez y obtendremos los valores de la función $g(x, y)$ en sus vértices, para encontrar los puntos de la región en los que la función es máxima y mínima.

Resolución

a) La región formada por las restricciones se representa en el siguiente gráfico:



$g(0, 1) = 1$; $g(1, 0) = 2$; $g(0, 7/3) = 7/3$; $g(2, 3) = 7$; $g(3, 2) = 8$.

b) Dentro de la zona de restricción, $g(x, y)$ alcanza su valor mínimo en (0, 1), y su máximo en (3, 2).

Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se pide calcular el área de una región del plano que se encuentra limitada por la gráfica de una función, que nos dan en su forma explícita, y el eje *OX*.

En primer lugar, obtendremos los puntos de intersección de la función con el eje de abscisas (*OX*). El valor de la superficie buscada se corresponderá al valor absoluto de la integral definida entre estos puntos. En cuanto al esbozo de la gráfica de la función, nos ayudaremos de los puntos de corte calculados, y estudiaremos su monotonía a través de la primera derivada.

Resolución

Puntos de corte con el eje OX ($y = 0$):

$$0 = x^3 - 2x^2;\ 0 = x^2(x - 2);\ x = 0 \text{ y } x = 2$$

Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:

Igualamos la derivada a cero y construimos una tabla de monotonía:

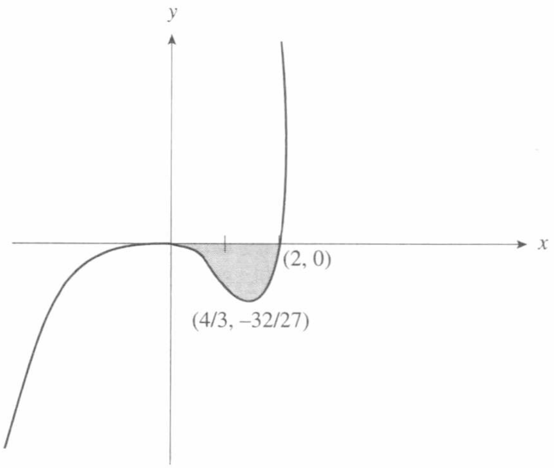
$$y' = 3x^2 - 4x = 0;\ x(3x - 4) = 0;\ x = 0 \text{ y } x = 4/3$$

Tabla:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 4/3)$	$4/3$	$(4/3, +\infty)$
y	$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

La función tiene un máximo en $(0, 0)$ y un mínimo en $(4/3, -32/27)$.

Esbozo:



Cálculo del área:

$$\text{Área} = \int_0^2 (x^3 - 2x^2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{-4}{3}$$

$$\text{Área} = \left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3} \text{ u.s.}$$

Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

En la descripción de la situación planteada en el enunciado se da la probabilidad de un determinado suceso («un hogar del barrio tenga al menos dos televisores») y se pide la de otros dos relacionados con éste.

Se trata de un ejercicio de probabilidad en el que la situación dada se ajusta a una distribución binomial. Los parámetros característicos de esta distribución son el número de hogares de la muestra ($n = 50$), y la probabilidad de que haya al menos dos televisores en uno de los hogares ($p = 0{,}6$).

Teniendo en cuenta que $n \cdot p = 30$ mayor que 5, la distribución binomial se puede tratar como una normal de parámetros $\bar{x} = np = 30$, y $\sigma = \sqrt{npq} = 3{,}46$. También hemos de considerar el hecho de pasar de una distribución discreta a una continua. Para ello:

$$\text{Si } x \text{ es } B(50,\ 0{,}6) \rightarrow x' \text{ es } N(30,\ 3{,}46) \rightarrow z \text{ es } N(0,\ 1)$$

entonces:

$$P(x \geqslant 20) = P(x' > 19{,}5) \text{ y } P(30 \leqslant x \leqslant 40) = P(29{,}5 < x' < 40{,}5)$$

Resolución

a) $P(x \geqslant 20) = P(x' > 19{,}5) = P\left(z > \dfrac{19{,}5 - 30}{3{,}46}\right) = P(z > -3) =$

$= P(z < 3) = \Phi(3) = 0{,}9987$

b) $P(30 \leqslant x \leqslant 40) = P(29{,}5 < x' < 40{,}5) =$

$= P\left(\dfrac{29{,}5 - 30}{3{,}46} < z < \dfrac{40{,}5 - 30}{3{,}46}\right) = P(-0{,}14 < z < 3) =$

$= P(z < 3) - P(z < -0{,}14) = \Phi(3) - [1 - P(z < 0{,}14)] =$

$= \Phi(3) - 1 + \Phi(0{,}14) = 0{,}9987 - 1 + 0{,}5557 = 0{,}5544$

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se dan la media y la varianza de un conjunto de datos. Se pide, en primer lugar, las unidades en que vendrían expresadas dichas media y varianza, si los datos se diesen en metros y, por último, que digamos si se modificarían los valores de la media y la varianza, si los datos, en vez de expresarse en metros, se dan en centímetros.

En la resolución del ejercicio tendremos presente la forma en la que calculamos ambos parámetros, media y varianza.

Resolución

a) Si disponemos de n datos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ con las respectivas frecuencias en las que se producen, $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$, la media se obtiene sumando los productos de cada valor con su frecuencia y dividiendo entre el número total de datos, n:

$$x = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \cdots + x_n f_n}{n}$$

Si los datos x_i vienen expresados en metros, al multiplicarlos por las frecuencias f_i, que son números sin unidades, obtenemos metros. A continuación, en el numerador sumamos metros y obtenemos metros, y al dividir esta suma entre un número sin unidades, n, volvemos a obtener metros. Es decir, para unos datos expresados en metros, tenemos una media en metros.

En cuanto a la varianza, la expresión será:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + x_3^2 f_3 + \cdots + x_n^2 f_n}{n} - x^2$$

En ella aparece la suma de los productos de los cuadrados de cada dato x_i^2 por cada una de sus frecuencias f_i. Por lo dicho anteriormente, este resultado viene definido en metros cuadrados; al dividirlo entre n, volvemos a tener metros cuadrados; y al quitarle el cuadrado de la media x^2, que también son metros cuadrados, resultan más metros cuadrados. Por tanto, para unos datos expresados en metros cuadrados se obtiene una varianza en metros cuadrados.

b) Razonando de manera similar, podemos deducir que si los datos vienen expresados en centímetros, la media también vendrá expresada en centímetros, y la varianza en centímetros cuadrados. Por supuesto, la media y la varianza variarán, ya que, en el caso de la media, aparecería multiplicada por 100, debido a la transformación de unidades de metros a centímetros, mientras que la varianza aparecería multiplicada por 10.000, es decir, $100 \cdot 100$, un 100 por el paso de unidades y el otro al elevarlo al cuadrado en cada uno de los datos.

REPERTORIO B

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, en el que aparece una indeterminada *k*, y se pide, en primer lugar, que estudiemos las posibles soluciones del sistema, según los valores de *k*, y después que se resuelva el sistema cuando *k* vale 5.

En la resolución de este ejercicio aplicaremos el método de Gauss.

Resolución

Planteamos la matriz correspondiente al sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 6 & k & 6 \end{array}\right) \overset{*}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & k-3 & -3 \end{array}\right)$$

Si $k - 3 = 0$, es decir, $k = 3$, tendremos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

de modo que se trataría de un sistema compatible indeterminado.

Si $k - 3 \neq 0$, es decir, $k \neq 3$, tendremos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & k-3 & -3 \end{array}\right)$$

por lo que el sistema sería compatible determinado.

Para $k = 5$, si sustituimos en la matriz anterior, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 2y &= -3 \end{aligned}\right\}$$

y despejando resulta $x = 2{,}25$, $y = -1{,}5$.

* $F_2 = -3F_1 + F_2$.

Alternativa:

Para el estudio de las soluciones del sistema, según el valor del parámetro k, podemos partir del hecho de que se trata de dos rectas (ecuaciones lineales con dos incógnitas). Estas dos rectas serían secantes y, por tanto, el sistema compatible determinado, cuando los coeficientes de las incógnitas no fueran proporcionales, es decir, cuando

$$\frac{2}{6} \neq \frac{1}{k}$$

o lo que es lo mismo, cuando $k \neq 3$.

En el supuesto de $k = 3$, tendríamos las siguientes relaciones, en las que ya interviene el término independiente:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq \frac{3}{6}$$

es decir, las dos rectas serían paralelas, y el sistema incompatible.

Cuestión 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un ejercicio de optimización, planteado a partir de un supuesto práctico, en el que aparecen enunciadas de forma coloquial las condiciones de restricción. Se nos pide que encontremos, en la zona de validez que determinan las condiciones de restricción, los valores de las variables que hacen mínima la función coste.

Representaremos la región de validez y trasladaremos la función coste hasta encontrar el vértice de la región en la que dicha función es mínima.

Resolución

Si x e y son, respectivamente, el número de viviendas de tipos A y B construidas por la cooperativa, buscaremos las condiciones de restricción utilizando como recurso una sencilla tabla de doble entrada, en la que tendremos en cuenta el número de viviendas edificadas y la cantidad de metros cuadrados construidos.

	Número de viviendas	m^2 en las viviendas
Tipo A	x	$150x$
Tipo B	y	$250y$
Total	$x + y$	$150x + 250y$

Atendiendo a las indicaciones del enunciado, «no pueden construirse más de 250 viviendas» y «la cooperativa debe construir al menos 45.000 m^2», por tanto:

$$x + y \leqslant 250$$

$$150x + 250y \geqslant 45.000$$

Además, «de las de tipo B se hará, a lo más, el doble que de las de tipo A», de manera que

$$y \leqslant 2x$$

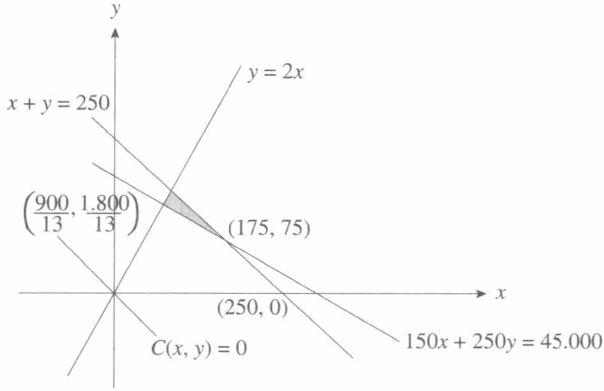
Si suponemos que el número de viviendas ha de ser en ambos casos una cantidad positiva, resulta que

$$x \geqslant 0$$

$$y \geqslant 0$$

Con lo que tenemos las condiciones de restricción buscadas.

La región de validez queda representada en el siguiente gráfico:



La función coste es $C(x, y) = 10x + 20y$ en millones de pesetas, y es mínima en el vértice (175, 75), como podemos ver en la gráfica tanto si sustituimos en los vértices como si trazamos en ellos la función coste. Así:

$$C(175, 75) = 3.250 \text{ millones}$$

Por tanto, el coste mínimo de 3.250 millones de pesetas, dentro de las condiciones de restricción impuestas, se consigue construyendo 175 viviendas del tipo A y 75 del tipo B.

Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Dada una función expresada en su forma explícita, se pide que la representemos gráficamente y que calculemos el área de una región del plano que se encuentra limitada por la gráfica de la función y el eje OX entre los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

En la representación de la función tendremos presente que se trata del valor absoluto de un polinomio de segundo grado; por tanto, proponemos primero obtener la función en su forma escalonada, diferenciando su parte positiva de su parte negativa, y después representarla. Las expresiones obtenidas serán las de dos parábolas. El cálculo del área se reduce a la obtención de la integral definida de la función determinada en el intervalo $(-1, 1)$.

Resolución

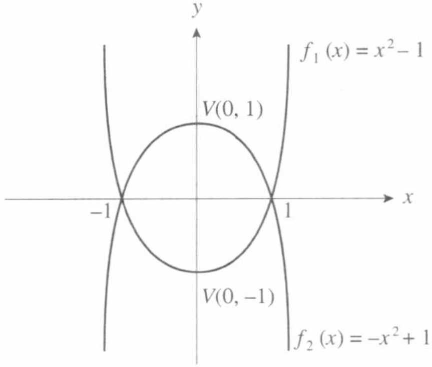
Representación gráfica:

La función dada en el ejercicio como $f(x) = |x^2 - 1|$ se puede escribir también como la función escalonada siguiente:

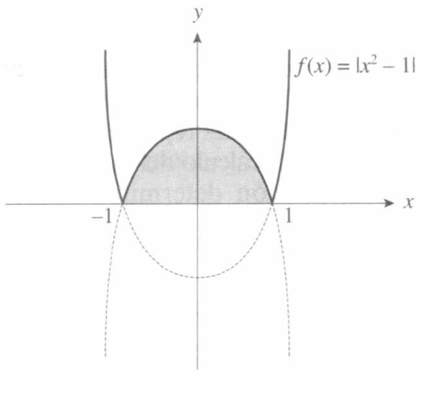
$$f(x) = \begin{cases} -(x^2 - 1) & \text{si} \quad x \in (-1, 1) \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \notin (-1, 1) \end{cases}$$

En primer lugar, representamos ambas expresiones en el mismo sistema de ejes coordenados. Podemos ver que estas expresiones corresponden a dos parábolas: $f_1(x) = x^2 - 1$ y $f_2(x) = -(x^2 - 1) = -x^2 + 1$.

La primera de ellas, $f_1(x)$, con vértice en el punto $(0, -1)$, corta al eje OX en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 1$, mientras que la segunda, $f_2(x)$, con vértice en el punto $(0, 1)$, corta al eje OX en los mismos puntos. Si damos algunos valores mediante una tabla, la representación resultará más sencilla.



Una vez representadas ambas funciones, nos quedaremos únicamente con lo que necesitamos de cada una, es decir, con $f_2(x) = -(x^2 - 1)$ si $x \in (-1, 1)$, y con $f_1(x) = x^2 - 1$ si $x \notin (-1, 1)$. Por tanto, la representación de $f(x)$ quedaría como sigue:



Cálculo del área:

$$\int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\, dx = \left.\frac{-x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} \text{ u.s.}$$

Por tanto, el área pedida es 4/3 u.s.

Alternativa:

En la representación no es necesario recurrir a la forma escalonada de la función, aunque resulta más formal; bastaría con representar la expresión sin el valor absoluto, es decir, $f(x) = x^2 - 1$, y después, ya que el valor absoluto convierte en positivo todo valor negativo de la función, dibujar «por encima del eje *OX*» la parte de la gráfica que se encuentre «por debajo del eje *OX*». Por lo que se refiere al cálculo de la superficie, ésta corresponderá al valor absoluto de la integral definida de la función, sin el valor absoluto, entre $x = -1$ y $x = 1$.

Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se plantea un problema de probabilidad en el que se extraen cuatro cartas de una baraja española, y se pide el cálculo de la probabilidad de dos sucesos asociados a este experimento aleatorio: «que las cuatro sean del mismo palo» y «que las cuatro sean del palo de copas».

En este enunciado no queda lo suficientemente claro si se trata de una extracción con o sin reemplazamiento; por tanto, lo resolveremos en ambos supuestos. En el primer caso, tendremos en cuenta que se trata de sucesos independientes, no así en el segundo.

Resolución

Con reemplazamiento:

a) P(«que las cuatro sean del mismo palo») = P(«que las cuatro sean de copas») + P(«que las cuatro sean de oros») + P(«que las cuatro sean de bastos») + P(«que las cuatro sean de espadas») = 4 · 0,004 = 0,016.

Siendo P(«que las cuatro sean de copas») = P(1.ª copas y 2.ª copas y 3.ª copas y 4.ª copas) = P(1.ª copas) · P(2.ª copas) · P(3.ª copas) · P(4.ª copas) = 10/40 · 10/40 · 10/40 · 10/40 = $(10/40)^4$ = 0,004, y así para los demás palos.

b) Acabamos de calcularlo en el apartado anterior.

Sin reemplazamiento:

a) P(«que las cuatro sean del mismo palo») = P(«que las cuatro sean de copas») + P(«que las cuatro sean de oros») + P(«que las cuatro sean de bastos») + P(«que las cuatro sean de espadas») = 4 · 0,023 = 0,01.
Siendo P(«que las cuatro sean de copas») = P[(1.ª copas) y (2.ª copas/1.ª copas) y (3.ª copas/1.ª copas y 2.ª copas) y (4.ª copas/1.ª copas y 2.ª copas y 3.ª copas)] = P(1.ª copas) · P(2.ª copas/1.ª copas) · · P(3.ª copas/1.ª copas y 2.ª copas) · P(4.ª copas/1.ª copas y 2.ª copas y 3.ª copas) = 10/40 · 9/39 · 8/38 · 7/37 = 0,0023, y así para los demás palos.

b) Acabamos de calcularlo en el apartado anterior.

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da una tabla en la que podemos ver la talla de 50 estudiantes agrupados en clases. Se pide la media, la desviación típica y la clase en la que se da la mediana.

Utilizaremos las fórmulas de la media, tanto para datos agrupados como no agrupados, y para saber la clase en la que está la mediana podemos recurrir a la construcción de una columna de frecuencias acumuladas.

Resolución

a) Tabla de frecuencias:

I_i	m_i	f_i	$(f_i)_a$
[155, 164]	159,5	23	23
[165, 174]	169,5	12	35
[175, 184]	179,5	10	45
[185, 194]	189,5	4	49
[195, 204]	199,5	1	50

La media para datos agrupados: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma m_i f_i}{50} = 169{,}1$ cm

La desviación típica será: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma m_i^2 f_i}{50} - x^2} = 10{,}76$ cm

b) Al haber 50 datos, la mediana se encuentra en la misma clase que los elementos que ocupan los lugares 25 y 26, es decir, en la clase [165, 174]. Se observa mejor en la columna de frecuencias absolutas acumuladas $(f_i)_a$.

PRUEBA DE SELECTIVIDAD VIII

COU

Matemáticas II (Optativa)

Distrito Universitario de Madrid. Septiembre de 1996.

INSTRUCCIONES PREVIAS

- El tiempo disponible para la realización de la prueba es de una hora y treinta minutos.
- El alumno desarrollará uno de los dos repertorios siguientes, y dará respuestas claras y concisas a cada una de las cinco cuestiones. El número de repertorio elegido debe figurar al principio del ejercicio.
- *Calificación:* La calificación máxima de cada uno de los cinco ejercicios será de 2 puntos.

REPERTORIO A

CUESTIÓN 1

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

calcular $(A + B)^2$ y $A^2 + 2AB + B^2$. ¿Por qué los resultados no son idénticos?

CUESTIÓN 2

Una empresa tiene dos centros de producción que fabrican tres tipos de productos: *A*, *B* y *C*. Sus compromisos comerciales les obligan a entregar semanalmente al menos 18 unidades del tipo *A*, 16 del tipo *B* y 6 del tipo

C. El primer centro de producción le cuesta diariamente 10^6 pesetas y produce, también diariamente, las siguientes unidades: 9 de *A*, 4 de *B* y 1 de *C*. El segundo centro de producción le cuesta diariamente $8 \cdot 10^5$ pesetas y produce 3 unidades de *A*, 4 de *B* y 3 de *C*. ¿Cuántos días por semana debe trabajar cada centro de producción para que, cumpliendo sus compromisos comerciales, se reduzcan al mínimo los costes de producción?

CUESTIÓN 3

Sea $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + x - 2}$ salvo en los puntos $x = 1$, $x = -2$. Determinar el valor que hay que asignar a $f(1)$ para que dicha función sea continua en $x = 1$.

CUESTIÓN 4

Sea *A* el suceso: «*El aspirante a una póliza de vida supera el examen médico*», *B* el suceso: «*El aspirante puede pagar las primas*» y *C* el suceso: «*La compañía de seguros autoriza la póliza*». Describir las probabilidades expresadas por:

a) $P(C/A)$
b) $P(C/B^C)$
c) $P[C/(A \cap B)]$
d) $P[(C \cap A)/B^C]$

(A^C indica «suceso contrario de *A*»).

CUESTIÓN 5

Los alumnos de un centro obtuvieron las siguientes notas finales en el examen de Selectividad:

5,4; 5,6; 5,6; 5,7; 5,7; 5,7; 5,8; 5,9; 5,9; 6,0; 6,2; 6,4; 6,6; 6,7; 7,1; 7,8; 8,3; 9,4; 9,5

a) Dibujar el histograma correspondiente a las notas agrupadas en cinco intervalos de la misma amplitud.
b) Utilizar la distribución anterior para calcular un parámetro que refleje la dispersión de esta muestra.

REPERTORIO B

CUESTIÓN 1

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calcular A^n, donde n es un número natural arbitrario.

CUESTIÓN 2

Minimizar la función $z = 3x + 4y$, sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geqslant 36 \\ 2x + 2y \geqslant 28 \\ 8x + 2y \geqslant 32 \\ x + y \geqslant 0 \end{cases}$$

CUESTIÓN 3

La virulencia de cierta bacteria se mide en una escala de 0 a 50 y viene expresada por $40 + 15t - 9t^2 + t^3$, donde t es el tiempo (en horas) transcurrido desde que comenzó el estudio ($t = 0$). Indicar los instantes de máxima y de mínima virulencia en las seis primeras horas y los intervalos en que ésta crece o decrece.

CUESTIÓN 4

Un psicólogo hace dos pruebas a un niño de primer curso de EGB. De anteriores experiencias en niños de la misma edad y colegio ha estimado que la probabilidad de resolver con éxito la primera prueba es 0,4 y la probabilidad de resolver con éxito la segunda prueba habiendo pasado la primera es de 0,6. ¿Cuál es la probabilidad de pasar con éxito las dos pruebas?

CUESTIÓN 5

Al medir el crecimiento, en centímetros, de una muestra de niños en el período de un año se obtuvieron los datos que figuran en la siguiente tabla:

Crecimiento	4	5	6	7	8	9	15
Frecuencia	6	10	15	12	5	2	2

a) Representar gráficamente los datos mediante un polígono de frecuencias acumuladas.

b) Calcular la media y la mediana. ¿Cuál de las dos es más representativa en este conjunto de datos? Justifica la respuesta.

RESOLUCIÓN DE LA PRUEBA

REPERTORIO A

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Dadas dos matrices A y B cuadradas de dimensión 2, se nos pide que calculemos dos expresiones algebraicas en las que intervengan ambas matrices, y que expliquemos por qué sus resultados son diferentes.

En el cálculo de ambas expresiones, bastará con sustituir el valor de las matrices y operar según las reglas que rigen las operaciones entre matrices. Aparentemente, el resultado de ambas expresiones, una vez calculadas, debería ser el mismo, pues sabemos que así es cuando se trata de números. Sin embargo, después del cálculo comprobaremos que ambos resultados son diferentes. Para explicar el motivo de esto último, recuerda que cuando se trata de matrices no se cumple la propiedad conmutativa, es decir, que dadas dos matrices A y B cualesquiera no siempre se verifica que $A \cdot B = B \cdot A$.

Resolución

Cálculo de $(A + B)^2$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $A^2 + 2AB + B^2$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2AB = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Si calculamos $(A + B)^2$ sin sustituir las matrices del ejercicio tenemos que

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

y esta expresión sería igual a $A^2 + 2AB + B^2$, siempre que $AB = BA$ y, como podemos comprobar, en este caso esta igualdad no se cumple.

Comprobación:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un ejercicio de optimización, planteado a partir de un supuesto práctico, en el que aparecen enunciadas de forma coloquial las condiciones de restricción. Se nos pide que encontremos, en la zona de validez que determinan las condiciones de restricción, los valores de las variables que hacen mínima la función coste.

Representaremos la región de validez y trasladaremos la función coste hasta encontrar el vértice de la región en la que dicha función es mínima.

Resolución

Si x e y son, respectivamente, el número de días trabajados por semana en el primer y segundo centro de producción, buscaremos las condiciones de restricción utilizando como recurso una sencilla tabla de doble entrada en la que aparecerán las cantidades de productos fabricados de cada tipo y en cada centro.

	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Primer centro de producción	$9x$	$4x$	x
Segundo centro de producción	$3y$	$4y$	$3y$
Producción por tipo	$9x + 3y$	$4x + 4y$	$x + 3y$

Atendiendo a las indicaciones del enunciado: «entregan semanalmente al menos 18 unidades del tipo A, 16 del tipo B y 6 del tipo C»:

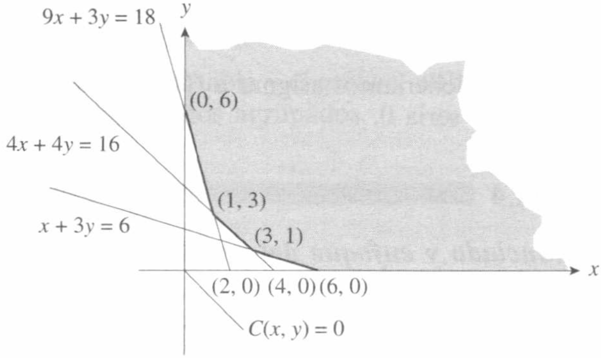
$$\left.\begin{aligned} 9x + 3y &\geqslant 18 \\ 4x + 4y &\geqslant 16 \\ x + 3y &\geqslant 6 \end{aligned}\right\}$$

Si suponemos que el número de días trabajados semanalmente por cada centro ha de ser una cantidad positiva, tendremos que:

$$\left.\begin{aligned} x &\geqslant 0 \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$

Con lo que tenemos las condiciones de restricción buscadas.

La región de validez queda representada en el siguiente gráfico:



La función coste es $C(x, y) = 10^6 x + 8 \cdot 10^5 y$, en pesetas, que es mínima en el vértice (1, 3), como podemos ver en la gráfica.

El valor en este mínimo es

$$C(1, 3) = 3.400.000$$

Si sustituimos en cada uno de los vértices tendremos:

$$C(0, 6) = 4.800.000 \quad C(3, 1) = 3.800.000$$
$$C(1, 3) = 3.400.000 \quad C(6, 0) = 6.000.000$$

Por tanto, para que se reduzca el coste dentro de las condiciones de restricción impuestas, el primero de los centros de producción deberá trabajar 1 día por semana, y 3 días el segundo de los centros. De esta manera, cumplirán sus compromisos comerciales con un coste mínimo de 3.400.000 pesetas.

Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Dada la expresión explícita de una función racional, definida en todos los números reales excepto para $x = 1$ y $x = -2$, se nos pide que determinemos el valor que deberíamos de asignar a $f(1)$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

La función $f(x)$ será continua en $x = 1$ si el valor de la función en $x = 1$, es decir, $f(1)$, coincide con el valor del límite de la función cuando x tiende a 1; por lo que el valor buscado correspondería al resultado de dicho límite.

Resolución

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^3}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{(x+2)} = 0$$

Luego el valor que deberíamos asignar a $f(1)$ para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$ sería 0.

Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

En este ejercicio se enuncian tres sucesos y se pide que describamos las probabilidades de otros cuatro sucesos relacionados con los anteriores.

En la resolución necesitamos recordar operaciones del álgebra de sucesos, como la intersección, el suceso contrario, y lo que supone que un suceso dependa de otro.

Resolución

Siendo:

A = «El aspirante a una póliza de vida supera el examen médico».
B = «El aspirante puede pagar las primas».
C = «La compañía de seguros autoriza la póliza».

$P(C/A)$: Probabilidad de que la compañía de seguros autorice la póliza presentada por un aspirante que ha pasado el examen médico.

$P(C/B^C)$: Probabilidad de que la compañía de seguros autorice la póliza presentada por un aspirante que no podrá pagar las primas.

$P[C/(A \cap B)]$: Probabilidad de que la compañía de seguros autorice la póliza presentada por un aspirante que ha superado el examen médico y puede pagar las primas.

$P[(C \cap A)/B^C]$: Probabilidad de que la compañía autorice la póliza y el aspirante supere el examen médico, sabiendo que dicho aspirante no podrá pagar las primas.

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da la relación de 19 notas de un examen de Selectividad y se pide que llevemos a cabo un estudio estadístico de dicha relación. Para ello se debe obtener:

a) Una tabla de datos agrupados (para la que nos viene dado el número de intervalos).
b) Un histograma de frecuencias.
c) Una medida de dispersión (calcularemos la desviación típica).

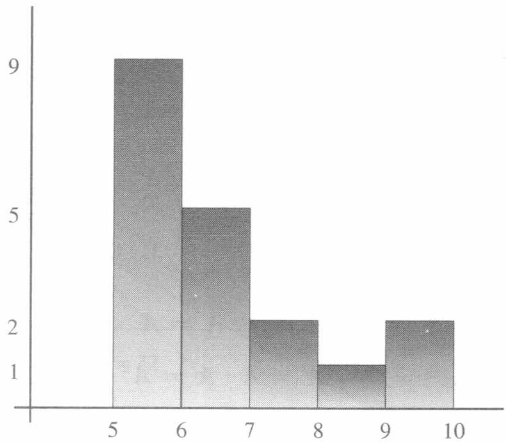
Una vez construida la tabla y el gráfico, utilizaremos la fórmula de la desviación típica para datos agrupados.

Resolución

a) Tabla:

Intervalo	m_i	f_i
[5,6)	5,5	9
[6,7)	6,5	5
[7,8)	7,5	2
[8,9)	8,5	1
[9,10)	9,5	2
		19

b) Histograma:



La media para datos agrupados es

$$x = \frac{\Sigma m_i f_i}{19} = 6{,}6$$

c) Por tanto, la desviación típica será:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma m_i^2 f_i}{19} - x^2} = 1{,}1$$

REPERTORIO B

Cuestión 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Dada una matriz cuadrada A de dimensión 3, se pide el cálculo de su enésima potencia.

Para ello, hallaremos las primeras potencias que nos ayudarán en la obtención de una ley de recurrencia.

Resolución

$$A^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ (matriz unidad)}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I$$

De aquí podemos deducir la ley de recurrencia:

$$A^n = A, \text{ si } n \text{ es un número impar}$$

$$A^n = I, \text{ si } n \text{ es un número par}$$

Cuestión 2

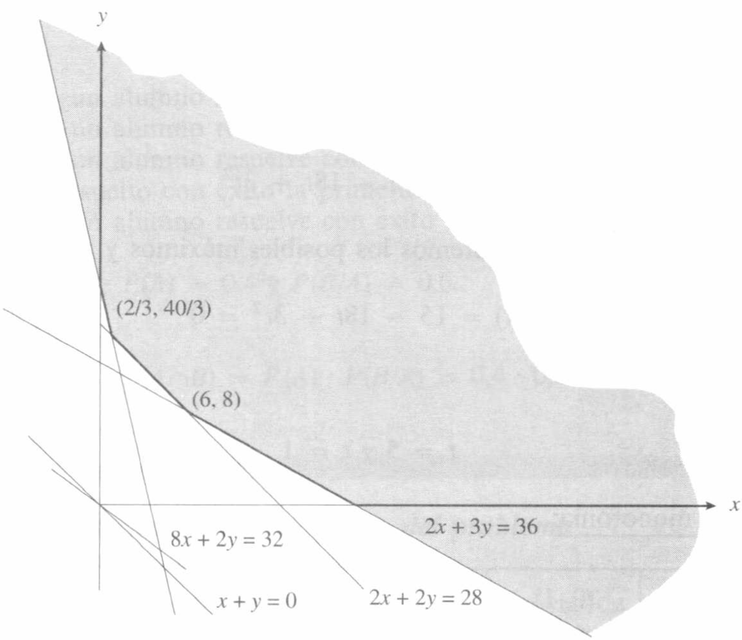
Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un ejercicio de optimización planteado sin ningún contexto práctico. Tanto las condiciones de restricción como la función a optimizar aparecen ya enunciadas de forma matemática. Se nos pide que, en la zona de validez dada, encontremos el valor mínimo de la función $z = 3x + 4y$.

Representaremos la región de validez y obtendremos los valores de la función dada en sus vértices para encontrar los puntos de la región en los que la función es mínima.

Resolución

La región formada por las restricciones se representa en el siguiente gráfico:



$$z(6, 8) = 50 \text{ y } z(2/3, 40/3) = 55{,}33$$

Dentro de la zona de restricción, $z(x, y)$ alcanza su valor mínimo en (6, 8).

Cuestión 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se nos da, mediante un polinomio de tercer grado, la relación existente entre dos variables: virulencia de una bacteria (que llamaremos V) y el tiempo t (en horas) transcurrido desde el comienzo de su estudio. Se nos pide que encontremos los valores de t en los que la virulencia $V(t)$ es máxima y mínima, así como los intervalos de t en los que la virulencia crece y decrece. Se añade como restricción el que los valores de t buscados se encuentren entre 0 y 6.

En la resolución estudiaremos la monotonía de la función dada a partir de la primera derivada de la función, y construiremos una tabla de monotonía.

Resolución

Dada la función

$$V(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$$

su derivada será:

$$V'(t) = 15 - 18t + 3t^2$$

Igualándola a cero tendremos los posibles máximos y mínimos:

$$V'(t) = 15 - 18t + 3t^2 = 0$$

resolviendo:

$$t = 5 \text{ y } t = 1$$

Tabla de monotonía:

t	(0, 1)	1	(1, 5)	5	(5, 6)
$V(t)$	$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$
$V'(t)$	+	0	−	0	+

La función tiene un máximo para $t = 1$ y un mínimo para $t = 5$. Mientras que la virulencia crece en la primera hora [$t \in (0, 1)$] y en la sexta [$t \in (5, 6)$], decrece durante la segunda, tercera, cuarta y quinta hora [$t \in (1, 5)$].

Cuestión 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se conocen las probabilidades de dos sucesos: «un alumno resuelve con éxito una primera prueba» y «un alumno resuelve con éxito una segunda prueba, habiendo resuelto con éxito la primera», y se pide la probabilidad del suceso «un alumno resuelve con éxito ambas pruebas».

En la resolución habrá que tener en cuenta que el suceso «un alumno resuelve con éxito ambas pruebas» es equivalente al suceso intersección de los dos sucesos dependientes «un alumno resuelve con éxito una primera prueba» y «un alumno resuelve con éxito una segunda prueba».

Resolución

Siendo:

A = «un alumno resuelve con éxito una primera prueba».
B = «un alumno resuelve con éxito una segunda prueba».
B/A = «un alumno resuelve con éxito una segunda prueba, habiendo resuelto con éxito la primera».
$A \cap B$ = «un alumno resuelve con éxito ambas pruebas».

Sabemos que $P(A) = 0{,}4$ y $P(B/A) = 0{,}6$.

Por tanto:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$$

Cuestión 5

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da una relación en la que aparecen el número de centímetros que crecen una muestra de niños en el período de un año, y se nos pide que hagamos un estudio estadístico en el que ha de aparecer:

a) Un polígono de frecuencias acumuladas.
b) La media y la mediana.

Una vez calculadas ambas medidas de centralización se nos pide que indiquemos cuál es más representativa para el conjunto de datos.

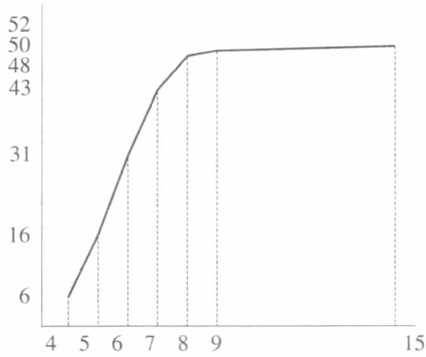
En la resolución obtendremos las frecuencias acumuladas y, para la elección de la mejor medida de centralización en este caso, tendremos presente si hay o no medidas extremas.

Resolución

a) Tabla:

Crecimiento	f_i	$(f_i)_a$
4	6	6
5	10	16
6	15	31
7	12	43
8	5	48
9	2	50
15	2	52

Polígono de frecuencias acumuladas:



b) Media: $\bar{x} = \dfrac{4 \cdot 6 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 15 + 7 \cdot 12 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 2 + 15 \cdot 2}{52} = 6{,}46$

Mediana: Si dividimos el número total de datos entre 2, obtenemos la posición de la mediana: el lugar número 26. En la columna de frecuencias acumuladas podemos comprobar que se trata del valor 6.

En este caso es más representativa la mediana que la media, al haber un valor del crecimiento extremo, o muy diferente con respecto a los demás.

PRUEBA DE SELECTIVIDAD IX

LOGSE

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales

Distrito Universitario de Madrid. Junio de 1996.

INSTRUCCIONES PREVIAS

- El examen presenta dos opciones: A y B; el alumno deberá elegir una de ellas y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica.
- *Tiempo*: Una hora y treinta minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1

Una empresa fabrica tres tipos de artículos: A, B y C. Los precios de coste por cada unidad son 600, 920 y 1.430 pesetas, respectivamente. Los correspondientes precios de venta de una unidad de cada artículo son 1.800, 2.800 y 4.000 pesetas. El número de unidades vendidas anualmente es de 2.400, 1.625 y 842, respectivamente. Sabiendo que las matrices de costes e ingresos, C e I, son diagonales y que la matriz de ventas, V, es una matriz fila, se pide:

a) Determinar las matrices C, I y V.

b) Obtener, a partir de las matrices anteriores, la matriz de ingresos anuales correspondiente a los tres artículos, la matriz de gastos anuales y la matriz de beneficios anuales.

Ejercicio 2

Sea la función

$$y = -(x + 2)(x - 2)(x - 4)$$

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha función cuando $x = 0$.
b) Hallar el área del recinto limitado por la curva y el eje de abscisas.

Ejercicio 3

Una urna A contiene 6 bolas blancas y 4 negras, una segunda urna B contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se selecciona una urna al azar y de ella se extraen 2 bolas sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean blancas.
b) Las dos bolas sean del mismo color.
c) Las dos bolas sean de distinto color.

Ejercicio 4

La duración de las bombillas de 100 vatios que fabrica una empresa sigue una distribución normal con una desviación típica de 120 horas. Su vida media está garantizada durante un mínimo de 800 horas. Se escoge al azar una muestra de 50 bombillas de un lote y, después de comprobarlas, se obtiene una vida media de 750 horas. Con un nivel de significación de 0,01, ¿habría que rechazar el lote por no cumplir la garantía?

OPCIÓN B

Ejercicio 1

a) En un ejercicio de Programación Lineal con dos variables, ¿cómo ha de ser la región factible para que se alcance necesariamente, en algún punto determinado de la misma, el valor óptimo de la función objetivo?
b) En la región determinada por

$$x + y \geqslant 2, \quad x \leqslant y, \quad x \geqslant 0 \quad \text{e} \quad y \geqslant 0$$

hallar las coordenadas de los puntos en los que la función $f(x, y) = 3x + 4y$ alcanza su valor mínimo y máximo.

Ejercicio 2

Para fomentar la utilización del transporte público entre dos puntos de una ciudad, una compañía de transportes ofrece sus servicios en las siguientes condiciones:

- Si el número de viajeros es menor o igual que 20, el billete costará 80 pesetas por persona.
- A partir de 20 viajeros, el precio del billete se obtendrá restando de 80 pesetas el número de viajeros que excedan de 20.

Teniendo en cuenta que en cada autobús caben como máximo 60 viajeros y designando por x el número de personas por viaje, se pide:

a) La expresión algebraica y la representación gráfica de la función $P(x)$ que proporciona el precio que ha de pagar cada viajero.
b) La expresión algebraica y la representación gráfica de la función $I(x)$ que proporciona los ingresos por viaje de la compañía.
c) Obtener el número de viajeros que proporciona el máximo ingreso por viaje a la compañía, así como el valor de dicho ingreso.

Ejercicio 3

A las nueve de la mañana surge un rumor en una ciudad que se difunde a un ritmo de

$$e^{2t} + 1.000$$

personas/hora. Sabiendo que t representa el número de horas transcurridas desde la aparición del rumor, calcular el número de personas que lo habrán oído entre las diez y las doce de la mañana.

Ejercicio 4

De una baraja española de 40 cartas, se eligen al azar simultáneamente cuatro cartas. Hallar:

a) La probabilidad de que se hayan elegido al menos dos reyes.
b) La probabilidad de que tres de las cuatro cartas sean del mismo palo.

RESOLUCIÓN DE LA PRUEBA

OPCIÓN A

Ejercicio 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se dan tres ternas de valores relacionados con tres artículos A, B y C:

1. Los precios de coste de cada unidad en pesetas.
2. Los precios de venta de una unidad de cada artículo.
3. Los números de unidades vendidas anualmente.

Se pide, en primer lugar, que pongamos las dos primeras ternas, la de coste (C) y la de ingresos (I), en forma de matrices diagonales, y la otra terna, la de ventas (V), en forma de matriz fila. En segundo lugar, y utilizando las matrices anteriores, hemos de obtener la matriz de ingresos anuales correspondiente a los tres artículos I_A, la matriz de gastos anuales G_A y la matriz de beneficios anuales B_A.

En la resolución del primer apartado tendremos en cuenta que una matriz diagonal es aquella matriz cuadrada cuyos elementos que no forman la diagonal principal son cero, y que una matriz fila tiene una única fila. Por lo que se refiere al segundo apartado, utilizaremos las operaciones entre matrices para su resolución, sabiendo que los ingresos anuales se obtienen multiplicando las unidades vendidas por el precio de cada unidad, mientras que los gastos anuales se obtienen multiplicando las unidades vendidas por el coste de cada unidad. En cuanto a los beneficios anuales, bastará con restar los gastos anuales a los ingresos anuales.

Resolución

a)

$$C(\text{matriz de costes}) = \begin{pmatrix} 600 & 0 & 0 \\ 0 & 920 & 0 \\ 0 & 0 & 1.430 \end{pmatrix}$$

$$I(\text{matriz de ingresos}) = \begin{pmatrix} 1.800 & 0 & 0 \\ 0 & 2.800 & 0 \\ 0 & 0 & 4.000 \end{pmatrix}$$

$$V(\text{matriz de ventas}) = (2.240,\ 1.625,\ 842)$$

b) Matriz de ingresos anuales I_A, correspondiente a los tres artículos:

$$I_A = V \cdot I = (2.240, 1.625, 842) \cdot \begin{pmatrix} 1.800 & 0 & 0 \\ 0 & 2.800 & 0 \\ 0 & 0 & 4.000 \end{pmatrix} =$$

$$= (4.032.000, 4.550.000, 3.368.000)$$

Matriz de gastos anuales G_A:

$$G_A = V \cdot C = (2.240, 1.625, 842) \cdot \begin{pmatrix} 600 & 0 & 0 \\ 0 & 920 & 0 \\ 0 & 0 & 1.430 \end{pmatrix} =$$

$$= (1.344.000, 1.495.000, 1.204.060)$$

Matriz de beneficios anuales B_A:

$$B_A = I_A - G_A = (2.688.000, 3.055.000, 2.163.940)$$

Ejercicio 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da como producto de factores la ecuación implícita de una función polinómica. Se pide, en primer lugar, encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva generada por esa función en un punto concreto ($x = 0$), y, a continuación, calcular el área limitada por la curva y el eje OX.

En la resolución del primer apartado utilizaremos la ecuación de la tangente a una curva en su forma punto-pendiente, $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Por lo que se refiere al segundo apartado, calcularemos el área mediante la integral definida de la función dada, entre los puntos de corte de ésta con el eje OX. Para encontrar estos puntos nos vendrá muy bien emplear la expresión factorizada de la función, tal y como aparece en el enunciado.

Resolución

a) Para el cálculo de la derivada será conveniente obtener el polinomio que representa esta función, multiplicando los factores:

$$y = -(x + 2)(x - 2)(x - 4) = -x^3 + 4x^2 + 4x - 16$$

Derivando esta expresión, obtenemos:

$$y' = -3x^2 + 8x + 4$$

Si sustituimos para $x_0 = 0$, tanto en y como en y', tendremos la ordenada del punto y la pendiente de la tangente a la curva en él, respectivamente.

$$y(x_0) = y(0) = -16, \quad y'(x_0) = y'(0) = 4$$

A partir de la ecuación $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, tenemos:

$$y + 16 = 4(x - 0)$$

o bien:

$$y = 4x - 16$$

que es la ecuación de la tangente buscada.

b) Para realizar el cálculo del área necesitamos primero conocer los límites de integración y después integrar entre ellos. Dichos límites son los puntos de corte de la curva de la función dada con el eje *OX*. Para encontrarlos, igualaremos a cero el valor de la ordenada y en la forma factorizada de la función (es más fácil), y despejaremos los valores de las abscisas buscadas.

$$y = -(x + 2)(x - 2)(x - 4) = 0$$

y como se ve de una manera inmediata, este producto es cero cuando lo es alguno de sus factores, es decir, cuando x vale -2, 2 o 4.

Puesto que se trata de una función continua, integramos entre estos valores, considerando que el área buscada es la suma de los valores absolutos de dichas integrales.

En $(-2, 2)$:

$$\int_{-2}^{2} (-x^3 + 4x^2 + 4x - 16)\, dx =$$

$$= \frac{-x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 16x \Big]_{-2}^{2} = \frac{-128}{3}$$

En (2, 4):

$$\int_2^4 (-x^3 + 4x^2 + 4x - 16)\, dx =$$

$$= \frac{-x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 16x\Bigg]_2^4 = \frac{20}{3}$$

El área pedida es, pues:

$$A = \left|\frac{-128}{3}\right| + \left|\frac{20}{3}\right| = \frac{148}{3} \text{ unidades de área}$$

Ejercicio 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se dan las composiciones de dos urnas que contienen, ambas, bolas blancas y negras, y se nos pide que, si se elige al azar una de ellas y de ésta se extraen dos bolas sin devolver la primera a la urna, calculemos las probabilidades de que se produzcan determinados sucesos.

En la resolución del problema utilizaremos un diagrama de árbol, ya que se trata de un caso de experimentos compuestos en el que, en primer lugar, se elige una urna y, en segundo lugar, se sacan de ella dos bolas. También recurriremos a la regla de Laplace, y no olvidaremos el importante hecho de que no hay reemplazamiento.

Resolución

Sean los siguientes sucesos:

A = «elegir la urna A». n = «extraer bola negra».
B = «elegir la urna B». b = «extraer bola blanca».

Según la regla de Laplace, en la elección de la urna:

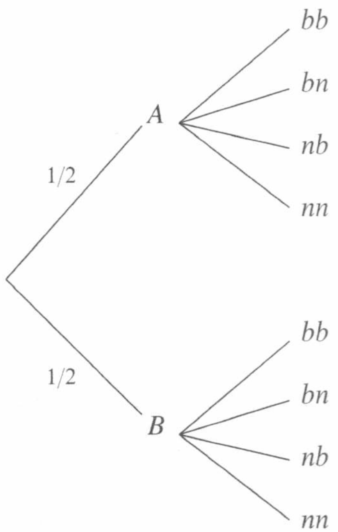
$$P(A) = \frac{1}{2} = P(B)$$

Por lo que se refiere a la extracción de las bolas:

$$P(b \text{ y } b/A) = 6/10 \cdot 5/9; \qquad P(b \text{ y } n/A) = 6/10 \cdot 4/9$$
$$P(n \text{ y } b/A) = 4/10 \cdot 6/9; \qquad P(n \text{ y } n/A) = 4/10 \cdot 3/9$$

$$P(b \text{ y } b/B) = 5/7 \cdot 4/6; \qquad P(b \text{ y } n/B) = 5/7 \cdot 2/6$$
$$P(n \text{ y } b/B) = 2/7 \cdot 5/6; \qquad P(n \text{ y } n/B) = 2/7 \cdot 1/6$$

Luego:



$$P(A \text{ y } bb) = 1/2 \cdot 6/10 \cdot 5/9 = 30/180$$
$$P(A \text{ y } bn) = 1/2 \cdot 6/10 \cdot 4/9 = 24/180$$
$$P(A \text{ y } nb) = 1/2 \cdot 4/10 \cdot 6/9 = 24/180$$
$$P(A \text{ y } nn) = 1/2 \cdot 4/10 \cdot 3/9 = 12/180$$

$$P(B \text{ y } bb) = 1/2 \cdot 5/7 \cdot 4/6 = 20/84$$
$$P(B \text{ y } bn) = 1/2 \cdot 5/7 \cdot 2/6 = 10/84$$
$$P(B \text{ y } nb) = 1/2 \cdot 5/7 \cdot 5/6 = 10/84$$
$$P(B \text{ y } nn) = 1/2 \cdot 2/7 \cdot 1/6 = 2/84$$

a) $P(b \text{ y } b) = P(A \text{ y } bb) + P(B \text{ y } bb) = 30/180 + 20/84 = 0{,}40$.

b) P(«los dos sean del mismo color») $= P(b \text{ y } b) + P(n \text{ y } n) = 0{,}40 + P(A \text{ y } nn) + P(B \text{ y } nn) = 0{,}40 + 12/180 + 2/84 = 0{,}49$.

c) P(«los dos sean de distinto color») $= 1 - P$(«los dos sean del mismo color») $= 1 - 0{,}49 = 0{,}51$.

Ejercicio 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un ejercicio de test de hipótesis en el que conocemos el valor de la media de una muestra de tamaño $n = 50$, que es $m = 750$, así como la desviación típica de la población $\sigma = 120$. Se pide que, a partir de estos datos, indiquemos si la media poblacional μ estimada será menor que 800, para un nivel dado de significación del 0,01, en cuyo caso no se cumpliría la garantía prometida.

Para resolver el problema formularemos una regla de decisión o ensayo de hipótesis, entre las siguientes hipótesis:

$H_0 : \mu = 800$ horas, y se cumple la garantía.

$H_1 : \mu < 800$ horas, y no se cumple la garantía.

Aquí, debe emplearse un ensayo unilateral al nivel de significación de 0,01, puesto que $\mu < 800$ incluye sólo valores menores de 800.

Resolución

Para un ensayo unilateral al nivel de significación de 0,01 se tiene la siguiente regla de decisión:

1. Si la z observada es menor que $-2{,}33$, los resultados son significativos al nivel del 0,01 y H_0 es rechazada.
2. De otro modo, H_0 es aceptada (o no se toma decisión alguna).

Bajo la hipótesis de que H_0 es cierta, se tiene que

$$z = \frac{750 - 800}{120/\sqrt{50}} = -2{,}94$$

que es menor que $-2{,}33$. Por tanto, según el ensayo propuesto, los resultados son significativos al 0,01 de nivel de significación, y rechazamos H_0, o dicho de otra manera, no se cumple lo garantizado.

OPCIÓN B

Ejercicio 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

En el primer apartado se pide determinar las condiciones que ha de tener la región factible para que en algún punto de ella se alcance el valor óptimo de la función objetivo.

En su resolución recurriremos a un conocido teorema de localización de soluciones.

El segundo apartado es un ejercicio de programación lineal planteado sin ningún contexto práctico. Tanto las condiciones de restricción como la función a optimizar aparecen ya enunciadas de forma matemática.

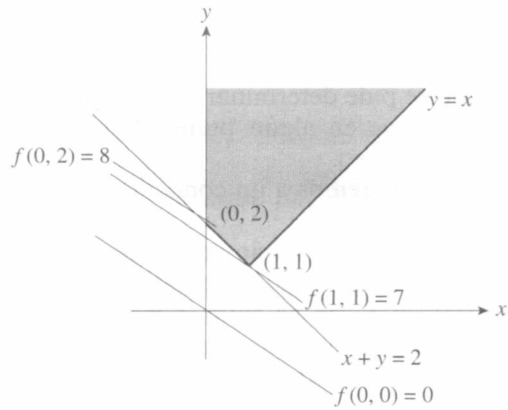
Representaremos la región de validez y, para conocer los valores óptimos, calcularemos el valor de $f(x, y) = 3x + 4y$ en los vértices de dicha región, si ésta fuera una región acotada, ya que de no ser así habrá que ver en primer lugar si el óptimo corresponde a la zona donde hay vértices. En ese supuesto, se procede como si la región fuese acotada, y en caso contrario, el problema carece de solución.

Resolución

a) *Teorema*: En un problema de Programación Lineal con dos variables, si la región factible existe y es acotada, el valor óptimo de la función objetivo se alcanza en uno de los vértices del polígono que limita la región, o a lo largo de uno de sus lados. Si la región factible no es acotada, la función objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto, pero si lo hace, éste se encuentra en uno de los vértices de la región.

b) Representación de la región factible:

$$x + y \geqslant 2,\ x \leqslant y,\ x \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant 0$$



Como podemos ver, se trata de una región no acotada; por tanto, atendiendo a lo dicho, la función alcanzará el valor mínimo en (1, 1), pues $f(0, 2) = 8$, y $f(1, 1) = 7$. En cuanto al valor máximo, no lo alcanza en ninguno de sus puntos.

Ejercicio 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se describe, mediante una serie de condiciones, la relación que existe entre el precio que ha de pagar cada viajero P y el número de éstos x. O dicho de otra manera, la función que relaciona el precio con el número de viajeros $P(x)$.

Se pide que obtengamos la expresión algebraica y la representación gráfica de dicha función, y de la que relaciona el ingreso por viaje de la compañía I con el número de viajeros x. También se pide que determinemos el número de viajeros que hará que el ingreso de la compañía sea máximo, así como el valor de éste.

En la resolución de los dos primeros apartados tendremos presente que el precio y el ingreso dependen del número de viajeros; que se trata de una función dada a trozos, ya que existen dos condiciones diferentes para describir la función, según el número de viajeros sea menor o igual o mayor que 20; y que entre las condiciones aparece el dominio de la función, cuando se nos informa que en cada autobús caben como máximo 60 viajeros. Por lo que se refiere al cálculo del máximo pedido, resultará muy fácil una vez que hayamos determinado las expresiones algebraicas.

Resolución

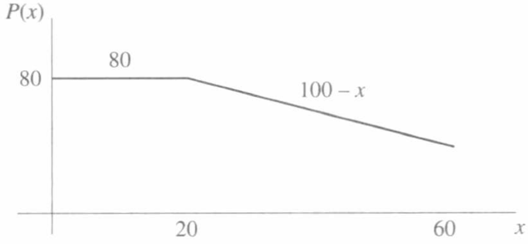
a) La expresión algebraica de la función $P(x)$ que proporciona el precio que ha de pagar cada viajero, en función del número de viajeros, se puede poner como:

$$P(x) = \begin{cases} 80 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 80 - (x - 20) & \text{si} \quad 20 < x \leqslant 60 \end{cases}$$

simplificando:

$$P(x) = \begin{cases} 80 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 100 - x & \text{si} \quad 20 < x \leqslant 60 \end{cases}$$

Su representación gráfica:



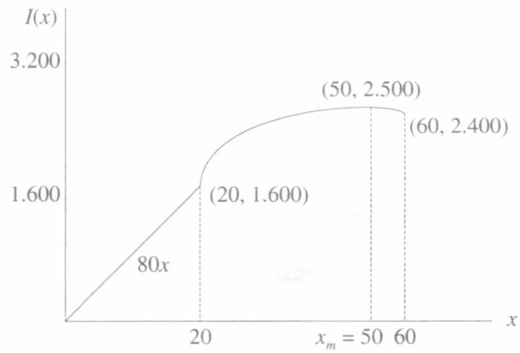
b) Para obtener la expresión algebraica de la función $I(x)$ que proporciona el ingreso por viaje de la compañía, multiplicamos el precio del viaje por el número de viajeros:

$$I(x) = \begin{cases} 80x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ (100 - x)x & \text{si} \quad 20 < x \leqslant 60 \end{cases}$$

simplificando:

$$I(x) = \begin{cases} 80x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 100x - x^2 & \text{si} \quad 20 < x \leqslant 60 \end{cases}$$

En cuanto a su representación gráfica:



c) La obtención del número de viajeros que proporciona el máximo ingreso por viaje a la compañía resulta sencilla sin más que observar la representación gráfica de la función ingreso. Se trata de una recta y una parábola, así que, en este caso concreto, bastaría con encontrar el vértice de dicha parábola, y tendríamos tanto el número de viajeros que hace máximo el ingreso x_M, como el valor de éste $I(x_M)$.

$$x_M = \text{abscisa de vértice} = -b/2a = -100/-2 = 50 \text{ viajeros}$$

$$I(x_M) = 100 \cdot 50 - 50^2 = 2.500 \text{ pesetas}$$

Ejercicio 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da la velocidad, en personas por hora, a la que se difunde un rumor, en función del número de horas transcurridas desde que comenzó dicho rumor (las 9 de la mañana). Se pide que calculemos el número de personas que oyen el rumor entre las 10 y las 12 de la mañana.

En la resolución tendremos en cuenta que la función que representa el número de personas, según el tiempo transcurrido desde la aparición del rumor, es la primitiva de la función que se nos da. Por tanto, para encontrar este número será necesario calcular la integral definida de la función dada, teniendo en cuenta que los límites de integración serán el 1 (a las 10 ha pasado una hora desde que surgió el rumor), y el 3 (a las 12 han pasado tres horas desde que apareció el rumor).

Resolución

Entre las 10 y las 12 de la mañana, los límites de integración corresponden a $x = 1$, $(10 - 9)$ y $x = 3$, $(12 - 9)$, y así, el número de personas será:

$$\int_1^3 (e^{2t} + 1.000)\, dt = \int_1^3 e^{2t}\, dt + \int_1^3 1.000\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2t} + 1.000t \Big]_1^3 = 2.198 \text{ personas}$$

Nota: En la resolución de la integral $\int e^{2t}\, dt$ basta con efectuar el cambio de variable $2t = x$, de modo que obtenemos una integral inmediata.

Ejercicio 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se describe un experimento aleatorio que consiste en elegir cuatro cartas de una baraja española de una manera simultánea, y se nos piden las probabilidades de dos sucesos.

En la resolución utilizaremos la regla de Laplace y la probabilidad del suceso contrario. Para el cálculo del número de casos, tanto favorables como posibles, recurriremos a la combinatoria.

Resolución

a) El suceso contrario de «al menos dos reyes» es «como máximo un rey». Por tanto, recurriendo a la probabilidad del suceso contrario, tendremos que:

P(«al menos dos reyes») = 1 − P(«como máximo un rey») = = 1 − [P(«ningún rey») + P(«un rey»)] = 1 − P(«ningún rey») − P(«un rey») = 1 − 0,64 − 0,31 = 0,05

$$P(\text{«ningún rey»}) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}} =$$

$$= \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38} \cdot \frac{33}{37} = 0{,}64$$

Siendo:

$\binom{36}{4}$: Todas las combinaciones de 4 cartas que podemos hacer con las 36 que quedan después de quitar los cuatro reyes.

$\binom{40}{4}$: Todas las combinaciones de 4 cartas que podemos hacer con las 40 de la baraja:

$$P(\text{«un rey»}) = \frac{\binom{36}{3} \cdot 4}{\binom{40}{4}} = 0{,}31$$

Siendo:

$\binom{36}{3} \cdot 4$: El número de combinaciones de 3 cartas que podemos hacer con las 36 que quedan después de quitar los cuatro reyes, multiplicado por las 4 posibilidades de que salgan reyes, ya que por cada rey hay $\binom{36}{3}$ grupos de 3 cartas posibles para que entre las cuatro extraídas sólo haya un rey.

$\underline{R_C}, 1_E, 2_O, 3_B$	$\underline{R_B}, 1_E, 2_O, 3_B$	$\underline{R_E}, 1_E, 2_O, 3_E$	$\underline{R_O}, 1_E, 2_O, 3_E$
$\underline{R_C}, 1_E, 2_O, 4_B$	$\underline{R_B}, 1_E, 2_O, 4_B$	$\underline{R_E}, 1_E, 2_O, 4_E$	$\underline{R_O}, 1_E, 2_O, 4_B$
....	....	....	....
$\underline{R_C}, 1_C, 2_O, 3_B$	$\underline{R_B}, 1_C, 2_O, 3_B$	$\underline{R_E}, 1_C, 2_O, 3_E$	$\underline{R_O}, 1_C, 2_O, 3_B$
....	....	....	....

b) P(«tres de las cuatro cartas sean del mismo palo») =

$$= \frac{\binom{10}{3} \cdot 30 \cdot 4}{\binom{40}{4}} = 0{,}16$$

$\binom{10}{3} \cdot 30 \cdot 4$: El número de combinaciones de 3 cartas que podemos hacer con las 10 de un palo, lo multiplicamos por las 30 posibilidades que se obtienen con cada una de las que quedan, y por los cuatro palos de la baraja:

$\underline{1_C}, \underline{2_C}, \underline{3_C}, 1_B$	$\underline{1_E}, \underline{2_E}, \underline{3_E}, 1_B$	$\underline{1_O}, \underline{2_O}, \underline{3_O}, 1_B$	$\underline{1_B}, \underline{2_B}, \underline{3_B}, 1_C$
$\underline{1_C}, \underline{2_C}, \underline{3_C}, 2_B$	$\underline{1_E}, \underline{2_E}, \underline{3_E}, 2_B$	$\underline{1_O}, \underline{2_O}, \underline{3_O}, 2_B$	$\underline{1_B}, \underline{2_B}, \underline{3_B}, 2_C$
....	....	....	....
$\underline{2_C}, \underline{3_C}, \underline{4_C}, 1_B$	$\underline{2_E}, \underline{3_E}, \underline{4_E}, 1_B$	$\underline{2_O}, \underline{3_O}, \underline{4_O}, 1_B$	$\underline{2_B}, \underline{3_B}, \underline{4_B}, 1_C$
....	....	....	....

PRUEBA DE SELECTIVIDAD X

LOGSE

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales

Distrito Universitario de Madrid. Septiembre de 1996.

INSTRUCCIONES PREVIAS

- El examen presenta dos opciones: A y B; el alumno deberá elegir una de ellas y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica.
- *Tiempo*: Una hora y treinta minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) Sean A una matriz de dimensión 5×4; B una matriz de dimensión $m \times n$ y C de dimensión 3×7. Si se sabe que se puede obtener la matriz producto ABC, ¿cuál es la dimensión de la matriz B? ¿Y la de la matriz ABC?

b) Si A es una matriz, ¿existe siempre el producto $A^T A$? Razone la respuesta.

Ejercicio 2

Una empresa dispone de 2.720.000 pesetas para actividades de formación de sus 100 empleados. Tras estudiar las necesidades de los empleados, se ha decidido organizar tres cursos: A, B y C. La subvención por persona para el curso A es de 40.000 pesetas, para el B es de 16.000 pesetas, y de 20.000 para el C. Si la cantidad que se dedica para el curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, ¿cuántos empleados siguen cada curso?

Ejercicio 3

El elemento radio se descompone según la expresión

$$y(t) = n \exp(-0{,}0004t)$$

donde $y(t)$ es la cantidad en gramos en el instante t, t es el tiempo en años, n es la cantidad inicial en gramos y $\exp(x) = e^x$ denota la función exponencial. Si se empieza con 500 gramos:

a) ¿Cuántos gramos quedarán al cabo de 200 años?
b) ¿Cuál será la velocidad de descomposición al cabo de t años?
c) ¿Cuál será la velocidad de descomposición a los 1.000 años?
d) ¿Cuánto tiempo tendrá que pasar para que la velocidad de descomposición sea igual a $-0{,}1637$?

Ejercicio 4

La cuarta parte de las participantes en un congreso son españolas. La probabilidad de que una congresista desayune té si es española es un octavo y la probabilidad de que tome té si es extranjera, es un tercio. Si se elige una congresista al azar,

a) ¿cuál es la probabilidad de que desayune té?;
b) ¿cuál es la probabilidad de que no sea española si desayuna té?;
c) ¿cuál es la probabilidad de que sea española si no desayuna té?

OPCIÓN B

Ejercicio 1

Una empresa fabrica dos tipos de colonia: *A* y *B*. La primera contiene un 15 % de extracto de jazmín, un 20 % de alcohol y el resto es agua, y la segunda lleva un 30 % de extracto de jazmín, un 15 % de alcohol y el resto es agua. Diariamente se dispone de 60 litros de extracto de jazmín y de 50 litros de alcohol. Cada día se pueden producir como máximo 150 litros de la colonia *B*. El precio de venta por litro de la colonia *A* es 500 pesetas y el de la colonia *B* es 2.000 pesetas. Hallar los litros de cada tipo que deben producirse diariamente para que el beneficio sea máximo.

Ejercicio 2

a) Hacer un esquema de la gráfica de la función

$$y = x^2 - 5x + 6$$

calculando sus máximos o mínimos relativos y los puntos de corte con el eje de abscisas.

b) Hallar el área comprendida entre la curva anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 5$.

Ejercicio 3

El diámetro de unos ejes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 2 mm. Se toma una muestra de tamaño 25 y se obtiene un diámetro medio de 36 mm. ¿Se puede afirmar con un nivel de significación de 0,01 que la media de la población es de 40 mm?

Ejercicio 4

La probabilidad del suceso A es 2/3, la del suceso B es 3/4 y la de la intersección es 5/8. Hallar:

a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos.
b) La probabilidad de que no ocurra B.
c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.
d) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

RESOLUCIÓN DE LA PRUEBA

OPCIÓN A

Ejercicio 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

En el primer apartado se nos dan las dimensiones de dos matrices A y C, y se nos pide la dimensión de una tercera, así como la del producto de las tres (sabiendo que este producto es posible). En el segundo se nos pide una respuesta razonada sobre si existe siempre, o no, el producto de la traspuesta de una matriz por la propia matriz.

Se trata de un ejercicio en el que hay que tener presente que, para que se puedan multiplicar dos matrices, es necesario que la primera tenga tantas columnas como filas la segunda; y que la dimensión de la matriz producto de dos matrices es el número de filas de la primera por el número de columnas de la segunda.

Resolución

a) Si sabemos que el producto ABC es posible, entonces, teniendo en cuenta lo dicho antes sobre la dimensión de la matriz producto de dos matrices, tenemos que:

$$A_{5\times 4}\cdot B_{m\times n}\cdot C_{3\times 7} = (A_{5\times 4}\cdot B_{m\times n})\cdot C_{3\times 7} \overset{(1)}{=} (AB)_{5\times n}\cdot C_{3\times 7} \overset{(2)}{=}$$
$$\overset{(2)}{=} (ABC)_{5\times 7}$$

(1) Como A y B se pueden multiplicar, 4 ha de ser igual a m, luego $m = 4$.
(2) Para que la matriz (AB) y C se puedan multiplicar, $n = 3$.

Por tanto, B tiene por dimensión 4×3, mientras que (ABC) tiene por dimensión 5×7.

b) Si tenemos una matriz A de dimensión $m\times n$, la matriz traspuesta de A, es decir, A^T, se obtiene cambiando sus filas por sus columnas, luego ésta tendrá por dimensión $n\times m$, y, al coincidir el número de columnas de A^T con el de filas de A, siempre será posible multiplicar la traspuesta de una matriz por dicha matriz, y obtener así una matriz de dimensión $n\times n$:

$$A^T_{n\times m}\,A_{m\times n} = (A^TA)_{n\times n}$$

Ejercicio 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se dispone de la siguiente información:

1. 100 alumnos para realizar tres cursos: A, B y C.
2. Una cantidad de dinero (2.720.000) para subvencionar los tres cursos A, B y C de manera que cada alumno del curso A recibe 40.000 pesetas, 16.000 pesetas para cada uno del B, y 20.000 pesetas para cada uno del C.

3. La cantidad que se dedica al curso A es cinco veces mayor que la que se dedica al curso B.

Se nos pide la cantidad de alumnos por curso.

Para resolver este ejercicio, llamaremos x, y, z al número de alumnos de los cursos A, B y C, respectivamente, y traduciremos a ecuaciones cada una de las condiciones 1), 2) y 3), formando así un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que resolveremos por el método de sustitución.

Resolución

De la condición 1) tenemos:

$$x + y + z = 100$$

De la condición 2) tenemos:

$$40.000x + 16.000y + 20.000z = 2.720.000$$

(Si se destinan 40.000 pesetas para cada alumno del curso A, y hay x alumnos en este curso, en total se habrán destinado $40.000x$ pesetas para todos los alumnos del curso A. Para los demás cursos, se razonaría de la misma forma.)

De la condición 3 tenemos:

$$40.000x = 5(16.000y)$$

Así, resulta el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 100 \\ 40.000x & + & 16.000y & + & 20.000z & = & 2.720.000 \\ 40.000x & - & 80.000y & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

Para su resolución despejamos x en la tercera ecuación y tenemos que $x = 2y$.

Sustituyendo el valor de x en las dos ecuaciones primeras, nos queda:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2y & + & y & + & z & = & 100 \\ 40.000(2y) & + & 16.000y & + & 20.000z & = & 2.720.000 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} 3y & + & z & = & 100 \\ 96.000y & + & 20.000z & = & 2.720.000 \end{array}\right\}$$

Si simplicamos en la segunda ecuación (dividiéndola entre 4.000), tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 3y + z &= 100 \\ 24y + 5z &= 680 \end{aligned}\right\}$$

Despejando z en la primera y sustituyendo su valor en la segunda, resulta:

$$\left.\begin{aligned} z &= 100 - 3y \\ 24y + 5(100 - 3y) &= 680 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} z &= 100 - 3y \\ 9y + 500 &= 680 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} z &= 100 - 3y \\ y &= 20 \end{aligned}\right\}$$

Luego, $y = 20$, $z = 40$ y $x = 40$.

Ejercicio 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se da la cantidad en gramos, $y(t)$, de un elemento químico (el radio), en función del número de años, t, transcurridos desde su peso original (500 gramos), mediante una expresión exponencial que se llama función de descomposición, y se pide:

a) La cantidad de gramos que tendrá al cabo de 200 años.
b) Su velocidad de descomposición en general (para cualquier t).
c) Su velocidad de descomposición para $t = 1.000$ años.
d) El tiempo, t, que deberá pasar para que la velocidad de descomposición sea $-0,1637$.

Antes de nada obtendremos el valor de n en la fórmula, sustituyendo t por 0 (instante inicial), e $y(t)$ por 500 (peso inicial). En la resolución del apartado *a*) bastará con sustituir, en $y(t)$, t por 200. Recordaremos que la velocidad de descomposición en un determinado instante de tiempo coincide con el valor de la derivada de la función de descomposición en ese valor de tiempo.

Resolución

En primer lugar obtenemos el valor de n:

$$y(0) = n \cdot e^{-0,0004 \cdot 0} = n \cdot 1 = 500$$

luego $n = 500$, y la expresión de la función dada quedaría:

$$y(t) = 500 \cdot e^{-0{,}0004t}$$

a) $y(200) = 500 \cdot e^{-0{,}0004 \cdot 200} = 461{,}56$ g

b) La velocidad de descomposición corresponde a la derivada primera de la función de descomposición:

$$y'(t) = 500 \cdot (-0{,}0004)\, e^{-0{,}0004t} = -0{,}2 \cdot e^{-0{,}0004t}$$

c) $y'(1.000) = -0{,}2 \cdot e^{-0{,}0004 \cdot 1.000} = -0{,}134$

d) Si la velocidad de descomposición $y'(t)$ es $-0{,}1637$, el tiempo pasado se obtendrá despejando t en la expresión de la velocidad:

$$y'(t) = -0{,}2 \cdot e^{-0{,}0004t} = -0{,}1637 \rightarrow e^{-0{,}0004t} = 0{,}8185$$

Aplicando logaritmos neperianos en ambos miembros de la igualdad, la propiedad del logaritmo de una potencia ($\log a^b = b \log a$), y $\ln e = 1$, tenemos:

$$\ln e^{-0{,}0004t} = \ln 0{,}8185 \rightarrow -0{,}0004t \cdot \ln e = \ln 0{,}8185 \rightarrow$$
$$\rightarrow t = \ln 0{,}8185/-0{,}0004 \rightarrow t = 500{,}70 \text{ años}$$

Por tanto, son necesarios 500,7 años para que la velocidad de descomposición sea $-0{,}1637$.

Ejercicio 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Nos dan la proporción de españolas en un congreso (que es como decir la probabilidad de que, elegida una participante al azar, resulte ser española), y un par de probabilidades condicionadas. Se pide que calculemos las probabilidades de otros tres sucesos.

En la resolución te proponemos que, tras nombrar los sucesos, construyas un diagrama de árbol, y a partir de él vayas entresacando las probabilidades pedidas. Además, como en el congreso sólo hay mujeres, el suceso contrario de «ser española» es «ser extranjera».

Resolución

Definimos los siguientes sucesos:

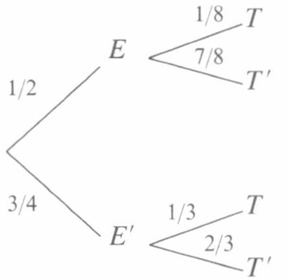
E = «ser española», $\quad E'$ = «ser extranjera»,

T = «desayuna té», $\quad T'$ = «no desayuna té»

Según el enunciado:

$$P(E) = 1/4; \quad P(T/E) = 1/8; \quad P(T/E') = 1/3$$

<u>Diagrama de árbol:</u>



$$P(E) \cdot P(T/E) = 1/4 \cdot 1/8 = 1/32 = 0{,}03$$

$$P(E) \cdot P(T'/E) = 1/4 \cdot 7/8 = 7/32 = 0{,}22$$

$$P(E') \cdot P(T/E') = 3/4 \cdot 1/3 = 1/4 = 0{,}25$$

$$P(E') \cdot P(T'/E') = 3/4 \cdot 2/3 = 1/4 = 0{,}50$$

a) $P(T) = P(E \cap T) + P(E' \cap T) = P(E) \cdot P(T/E) + P(E') \cdot P(T/E') =$

$= 1/32 + 1/4 = 0{,}28$

b) Una congresista que desayuna té será española con una probabilidad de 0,03, y no será española con una probabilidad de 0,25. Sabemos que una congresista desayuna té con una probabilidad de 0,28. Estos números nos indican que por cada 28 personas que toman té, 3 son españolas y 25 no lo son, luego la probabilidad de que una congresista no sea española, si sabemos que toma té, será:

$$\frac{25}{28} = 0{,}89$$

c) Una congresista que no desayuna té será española con una probabilidad de 0,22, y no será española con una probabilidad de 0,50. Sabemos que una congresista no desayuna té con una probabilidad de 0,72 (1 − 0,28). Estos números nos indican que por cada 72 personas que no toman té, 22 son españolas y 50 no lo son, luego la probabilidad de que una congresista sea española, si sabemos que no toma té, será:

$$\frac{22}{72} = 0{,}31$$

Alternativa:

Utilizando el teorema de Bayes podremos resolver de una manera más formal los apartados *b*) y *c*), de la siguiente forma:

$$b)\quad P(E'/T) = \frac{P(E') \cdot P(T/E')}{P(E) \cdot P(T/E) + P(E') \cdot P(T/E')} = \frac{0{,}25}{0{,}03 + 0{,}25} = 0{,}89$$

$$c)\quad P(E/T') = \frac{P(E) \cdot P(T'/E)}{P(E) \cdot P(T'/E) + P(E') \cdot P(T'/E')} = \frac{0{,}22}{0{,}22 + 0{,}50} = 0{,}31$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un ejercicio de optimización planteado a partir de un supuesto práctico, en el que aparecen enunciadas de forma coloquial las condiciones de restricción y la función a optimizar. Se nos pide que encontremos el valor máximo alcanzado por la función en la zona de validez que determinan las condiciones de restricción.

En la resolución, primero expresaremos en forma matemática, a través de inecuaciones, las condiciones de restricción y, con una ecuación, la función precio de venta (relacionada directamente con el beneficio). Después representaremos gráficamente la región o zona de validez, y en ella buscaremos los valores que hacen máxima la función precio de venta.

Resolución

Llamaremos a las incógnitas x e y, siendo:

x = número de litros de la colonia A producidos diariamente, e
y = número de litros de la colonia B producidos diariamente.

Para simplificar la obtención de las inecuaciones, que representan a las condiciones de restricción, utilizaremos la siguiente tabla:

	Extracto de jazmín	Alcohol
Colonia A	$0{,}15x$	$0{,}20x$
Colonia B	$0{,}30y$	$0{,}15y$
Total	$0{,}15x + 0{,}30y$	$0{,}20x + 0{,}15y$

en donde $0{,}15x + 0{,}30y$ y $0{,}20x + 0{,}15y$ son, respectivamente, la cantidad de litros de extracto de jazmín y alcohol que se utiliza diariamente en ambas colonias.

Por tanto, y según las limitaciones de cantidad de litros impuesta, las restricciones serán

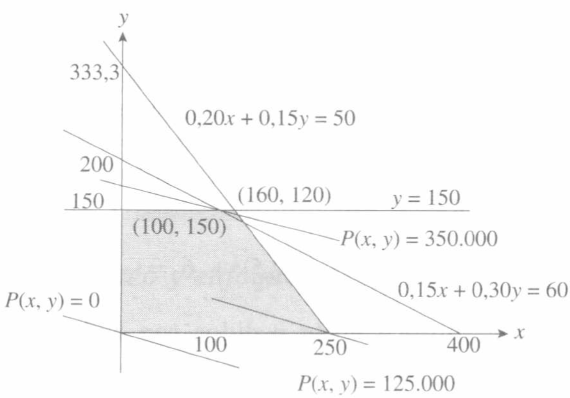
$$0{,}15x + 0{,}30y \leqslant 60$$
$$0{,}20x + 0{,}15y \leqslant 50$$

Por otra parte, y teniendo en cuenta la condición dada en el enunciado según la cual «cada día se pueden producir como máximo 150 litros de colonia B», aparece la restricción $y \leqslant 150$, además de las evidentes:

$$x \geqslant 0$$
$$y \geqslant 0$$

En cuanto a la función a maximizar, es decir, al beneficio, está directamente relacionada con la función que expresa el precio de la venta en función de los litros producidos diariamente de ambas colonias. Por tanto, el beneficio será máximo cuando lo sea la función precio de venta:

$$P(x, y) = 500x + 2.000\,y, \text{ en pesetas}$$



Calculamos el valor de la función precio en los vértices de la región factible:

$$P(0, 0) = 0;\ P(250, 0) = 125.000;\ P(160, 120) = 320.000;$$
$$P(100, 150) = 350.000 \text{ y } P(150, 0) = 75.000.$$

Por tanto, el beneficio máximo se produce con la producción diaria de 100 litros de la colonia tipo A y 150 litros de la colonia tipo B.

Ejercicio 2

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se nos da la ecuación explícita de una función, y se nos pide que hagamos un esbozo de su gráfica, calculando máximos, mínimos y puntos de corte con el eje OX. También se nos pide que calculemos el área limitada por la curva que representa esta función, el eje OX, y las dos rectas verticales $x = 1$ y $x = 5$.

En la representación, tendremos en cuenta que se trata de la ecuación de una parábola, mientras que en el cálculo del área utilizaremos la integral definida.

Resolución

a) Como se trata de una parábola, conocidos los puntos de corte con el eje de abscisas, podremos calcular de una manera sencilla su vértice, que además corresponde con un mínimo relativo de dicha función, ya que se trata de una parábola con las ramas «hacia arriba», al tener positivo el coeficiente de x^2.

Para el cálculo de los puntos de corte imponemos en la ecuación la condición de que las ordenadas de estos puntos sean cero ($y = 0$), de donde $y = x^2 - 5x + 6 = 0$.

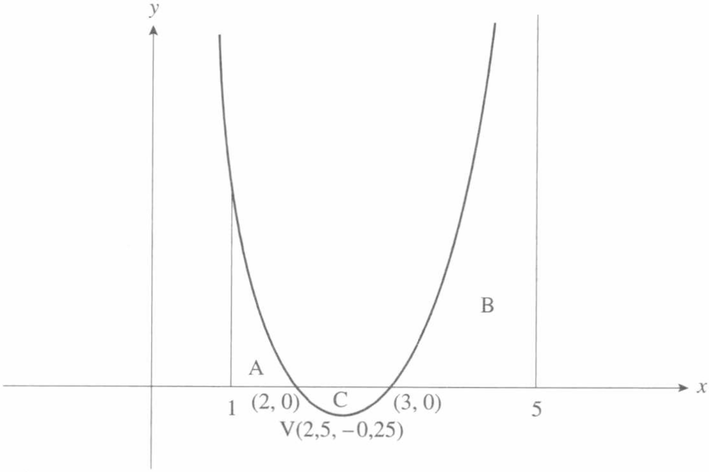
Resolviendo la ecuación tenemos dos soluciones: $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

La abscisa del vértice de dicha parábola corresponde con el punto medio del intervalo $[2, 3]$, es decir, $x = 2,5$. En cuanto a su ordenada o coordenada y, bastará con sustituir $x = 2,5$ en la ecuación de la parábola

$$y = (2,5)^2 - 5(2,5) + 6 = -0,25$$

Luego los puntos de corte pedidos son $P(2, 0)$ y $P'(3, 0)$, y el vértice o mínimo relativo es $V(2,5, -0,25)$.

El esquema de la gráfica:



b) Se trata de calcular la superficie de las tres zonas marcadas en el dibujo con las letras *A*, *B* y *C*, y sumarlas. Utilizando la integral definida entre los límites marcados, y teniendo en cuenta que el área se corresponde con el valor absoluto de dichas integrales, tenemos:

$$\text{Área de } A = \int_1^2 (x^2 - 5x + 6)\,dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \,\right]_1^2 = 0{,}83 \text{ u.s.}$$

$$\text{Área de } B = \int_3^5 (x^2 - 5x + 6)\,dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \,\right]_3^5 = 4{,}7 \text{ u.s.}$$

$$\text{Área de } C = \left| \int_2^3 (x^2 - 5x + 6)\,dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \,\right]_2^3 \right| =$$

$$= |-0{,}17| = 0{,}17 \text{ u.s.}$$

$$\text{Área total pedida} = 0{,}83 + 4{,}7 + 0{,}17 = 5{,}7 \text{ u.s.}$$

Ejercicio 3

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se trata de un ejercicio de test de hipótesis en el que conocemos el valor de la media de una muestra de tamaño $n = 25$, es decir, $m = 36$ mm, así como la desviación típica de la población, $\sigma = 2$ mm. Se nos pide que, a partir de estos datos, digamos si la media poblacional, μ, podría valer 40 mm, para un nivel dado de significación del 0,01.

En la resolución del ejercicio formularemos una regla de decisión o ensayo de hipótesis, entre las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \mu = 40 \text{ mm}$$

$$H_1 : \mu \neq 40 \text{ mm}$$

Aquí debe utilizarse un ensayo bilateral, puesto que $\mu \neq 40$ incluye valores mayores y menores de 40.

Resolución

Para un ensayo bilateral al nivel de significación del 0,01 se tiene la siguiente regla de decisión:

1. Se rechaza H_0 si la z de la media muestral se encuentra fuera del rango $-2{,}58$ a $2{,}58$.
2. Se acepta H_0 (o no se toma decisión alguna) en caso contrario.

El estadístico que estamos considerando es la media muestral X. La distribución muestral de X tiene una media $M = \mu$ y una desviación típica $S_M = \sigma/\sqrt{n}$, donde μ y σ son la media y la desviación típica de la población.

Bajo la hipótesis H_0, se tiene $\mu = 40$ y $\sigma_X = \sigma/\sqrt{n} = 2/\sqrt{25} = 0{,}4$, utilizando la desviación típica muestral como una estima de σ.

Puesto que $z = (m - 40)/0{,}4 = (36 - 40)/0{,}4 = -10$ se encuentra fuera del rango $-2{,}58$ a $2{,}58$, se rechaza H_0 al nivel de significación del 0,01. O, dicho de otra manera, no se puede afirmar, con un nivel de significación de 0,01, que el diámetro medio en dicha población sea de 40 mm.

Ejercicio 4

Análisis del enunciado y enfoque del problema

Se dan las probabilidades de dos sucesos y del suceso intersección de ambos, y se pide el cálculo de las probabilidades de sucesos relacionados con ellos.

Para la resolución, en primer lugar tendremos que traducir a lenguaje de sucesos las expresiones coloquiales que aparecen en cada apartado.

Después, calcularemos las probabilidades pedidas ayudándonos de propiedades del álgebra de sucesos, como las leyes de Morgan, y de propiedades sobre la probabilidad de la unión de dos sucesos o sobre sucesos condicionados.

Resolución

a) «Que se verifique alguno de los dos» equivale a decir en álgebra de sucesos que se verifique A o B, es decir, que se verifique la unión de ambos, $A \cup B$, y para el cálculo de la probabilidad utilizaremos la propiedad siguiente:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = 0{,}79$$

b) «Que no ocurra B» equivale a decir en álgebra de sucesos que se verifique B', y para el cálculo utilizaremos la propiedad del suceso contrario:

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

c) «Que no se verifique ni A ni B» equivale a decir en álgebra de sucesos que se verifique A' y B', es decir, que se verifique la intersección entre sus contrarios, $A' \cap B'$, y para el cálculo de la probabilidad utilizaremos la ley de Morgan, según la cual $A' \cap B' = (A \cup B)'$, la ley de la probabilidad del suceso contrario y el resultado del apartado *a*):

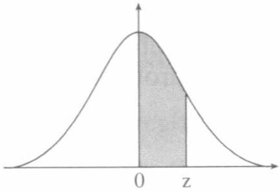
$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}79 = 0{,}21$$

d) «Que ocurra A si se ha verificado B» equivale a decir en álgebra de sucesos que se verifique A condicionado a que se haya verificado B, es decir, que se verifique A/B. Para el cálculo, utilizaremos la siguiente propiedad de la probabilidad condicionada:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = 0{,}83$$

TABLA I

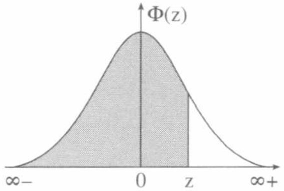
ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL
TIPIFICADA DE 0 A z



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2793	0,2823	0,2652
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3364	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4485	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4762	0,4767
2,0	0,4773	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4865	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4975	0,4975	0,4976	0,4977	0,4978	0,4978	0,4979	0,4980	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

TABLA II

DISTRIBUCIÓN NORMAL



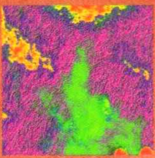
x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

PRUEBAS DE SELECTIVIDAD

GEOGRAFÍA

MATEMÁTICAS I

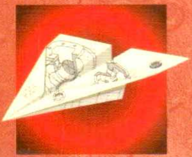
FÍSICA



QUÍMICA

MATEMÁTICAS II

INGLÉS

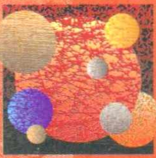


DIBUJO TÉCNICO

LENGUA,
C. TEXTO
Y LITERATURA

HISTORIA

ECONOMÍA
Y ORGANIZACIÓN
DE EMPRESAS



BIOLOGÍA.
C. TIERRA
Y M. AMBIENTE

9 788448 109073

ISBN: 84-481-0907-4